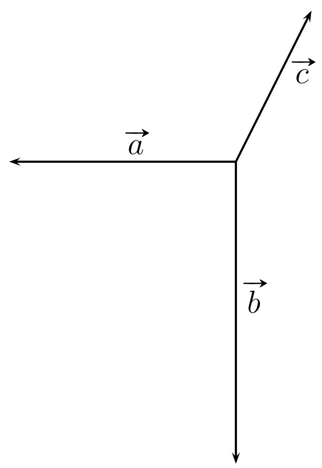
Chapitre 1

Géométrie vectorielle

1.1 Propriétés des vecteurs dans le plan et l'espace

1.1.1 Représenter un hexagone régulier $ABCDEF$ de centre O. Donner le nombre de vecteurs différents que l'on peut définir à l'aide des lettres de cette figure, ainsi qu'un représentant de chaque vecteur.

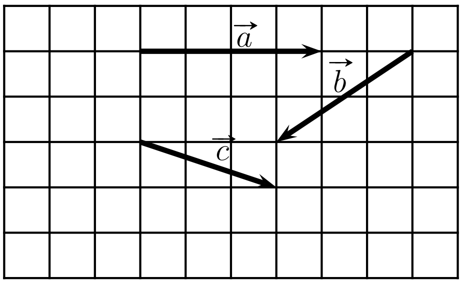
1.1.2
Construire la somme des trois vecteurs ci-dessous :



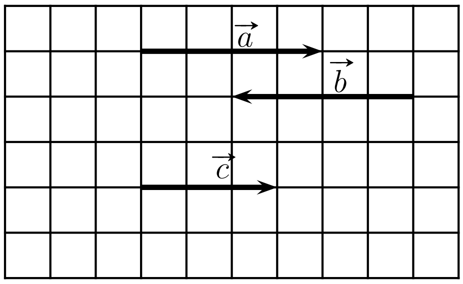
Tracer trois vecteurs non nuls et n'ayant pas la même direction mais dont la somme soit le vecteur nul.

1.1.3 Dans chaque cas, construire le vecteur demandé.

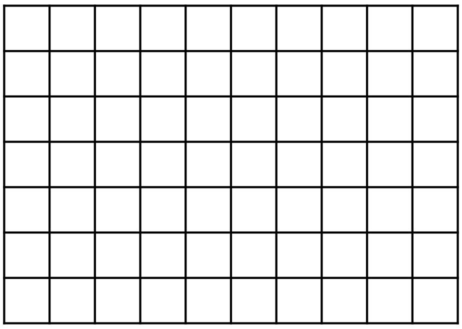
Cas 1

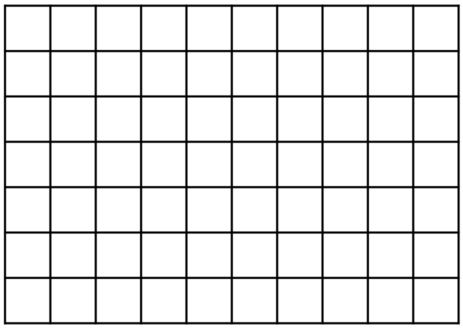


Cas 2

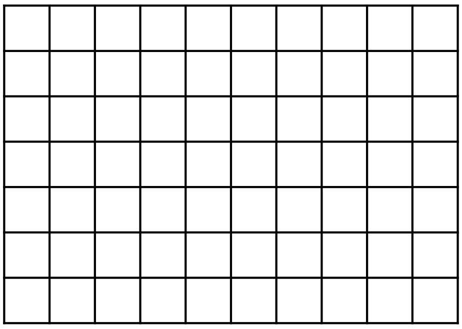


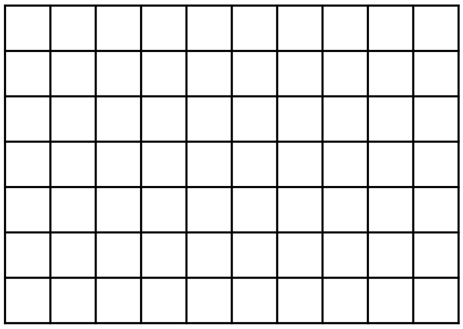
Le vecteur $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}$



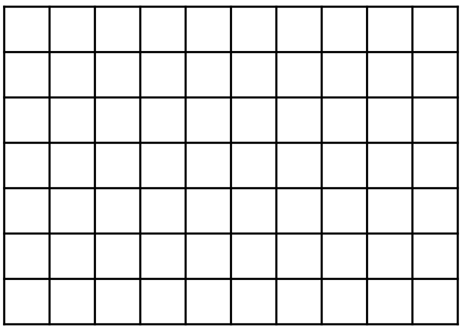


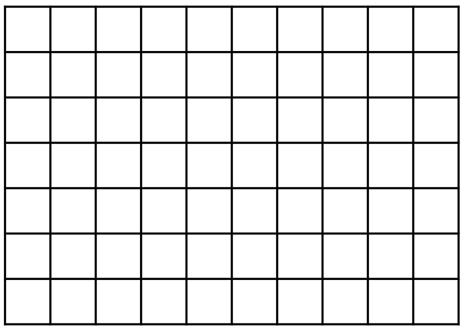
Le vecteur $\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} + \overrightarrow{a}$



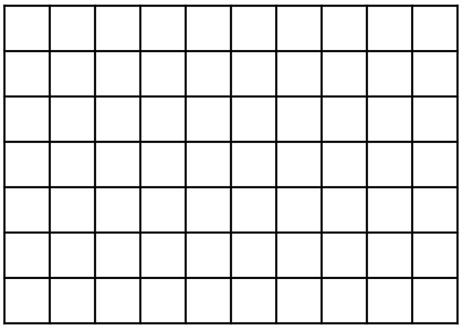


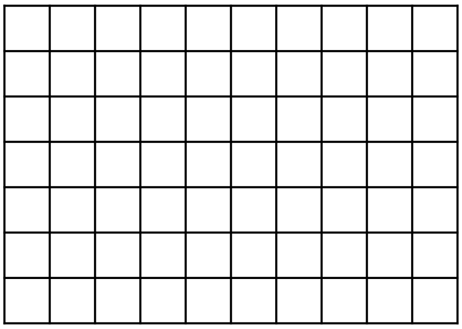
Le vecteur $\overrightarrow{a} - \left(\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}\right)$





Le vecteur $\vec{x}$ tel que $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b}$





1.1.4 Soit A, B, C, D et E des points quelconques. Sans utiliser de dessin, simplifier le plus possible les expressions suivantes :

a) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{EB}$

c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AB}$

d) $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$

e) $\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$

1.1.5 On considère le parallélépipède $ABCD\ EFGH$ représenté ci-dessous. Simplifier au maximum les expressions vectorielles suivantes :

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG}$

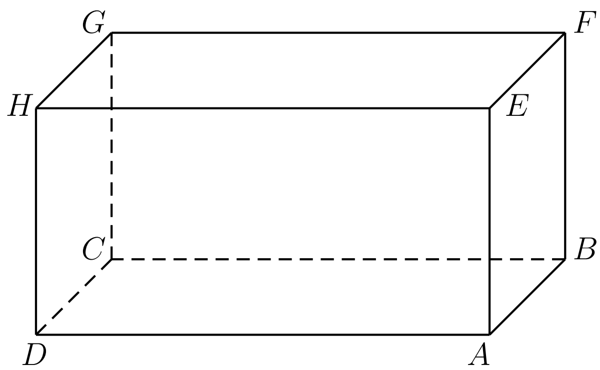
b) $\vec{b} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CD}$

c) $\vec{c} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{CA}$

d) $\vec{d} = \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GA}$

e) $\vec{e} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EB}$

f) $\vec{f} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GF}$



1.1.6 Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O. Exprimer plus simplement les vecteurs qui suivent. Utiliser le point O lorsque c'est nécessaire.

a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}$

c) $\vec{c} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{FE}$

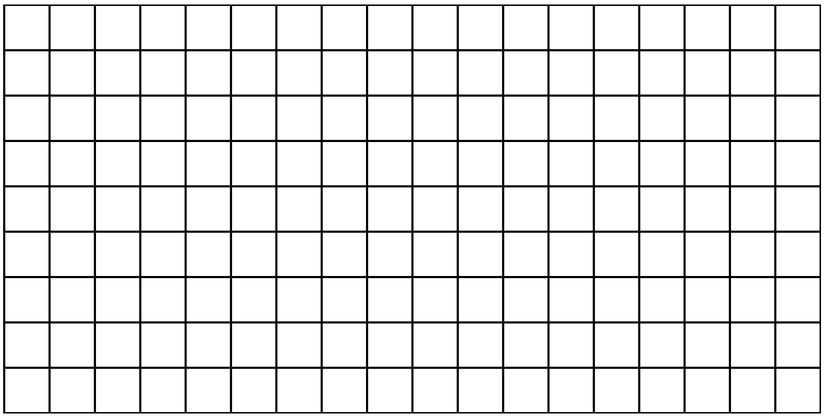
d) $\vec{d} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{DE}$

e) $\vec{e} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FE}$

f) $\vec{f} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD}$

1.1.7 Reprendre les vecteurs de l'exercice 1.1.3 et représenter dans les deux cas le vecteur

$$3\,\vec{a} + 2\,\vec{b} - 3/2\,\vec{c}$$



1.1.8 Représenter trois points A, B et P pour lesquels :

a) $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

c) $\overrightarrow{PA} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{BP}$

d) $\overrightarrow{PA} = \frac{-3}{5}\overrightarrow{BP}$

e) $\overrightarrow{PA} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$

f) $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{-4}\overrightarrow{PB}$

g) $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PB}$

1.1.9 Exprimer $\vec{v}$ en fonction de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ si

$$3\,(\vec{a} - 2\vec{v}) - 6\,\vec{b} = -7\left(\frac{15}{7}\vec{v} - 3\,\vec{b}\right) + 12\vec{a}.$$

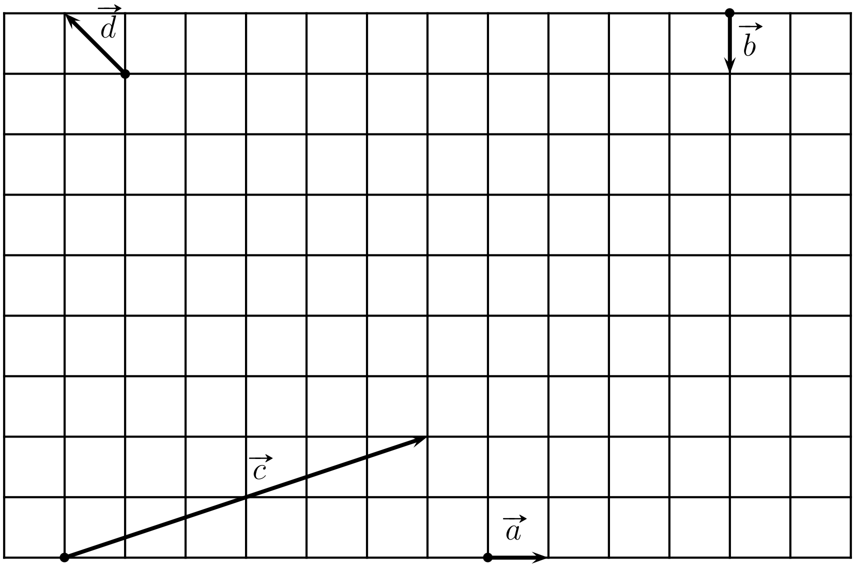
1.1.10 Soit ABC un triangle quelconque. Notons P le milieu de AB et Q celui de AC. Faire une figure d'étude. Le théorème du segment moyen affirme que le segment PQ est parallèle au côté BC et que sa longueur est la moitié de celle de BC.
Exprimer ce résultat à l'aide de vecteurs.

1.1.11 Par rapport aux vecteurs de la figure :

a) Exprimer $\vec{c}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

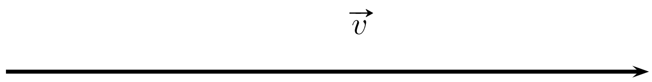
b) Exprimer $\vec{d}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

c) Exprimer $\vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{c} - 5\vec{d}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.



1.1.12 Soit $\vec{v}$ le vecteur donné. Construire à la règle (non graduée) et au compas les vecteurs :

$$\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{v} \quad \vec{b} = -3\vec{v} \quad \vec{c} = \frac{-3}{5}\vec{v} \quad \vec{d} = \sqrt{2}\vec{v} \quad \vec{e} = \sqrt{3}\vec{v}$$



1.1.13 Soit $ABCD\ EFGH$ un cube pour lequel on pose $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$. Soit M le milieu du côté FG, N celui de HG et P le centre de la face $ABCD$. Faire une figure d'étude puis exprimer les vecteurs suivants comme combinaison linéaire de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$: $\overrightarrow{EP}$, $\overrightarrow{EM}$, $\overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{NP}$, et $\overrightarrow{PM}$.

1.1.14 Soit $ABCD$ un parallélogramme pour lequel on pose $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Soit M le milieu de BC et P le point tel que $\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PC}$. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PM}$ et $\overrightarrow{DM}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

1.1.15 Soit $ABCD$ un tétraèdre de l'espace[1], I le milieu de AC et J celui de BD. Prouver que :

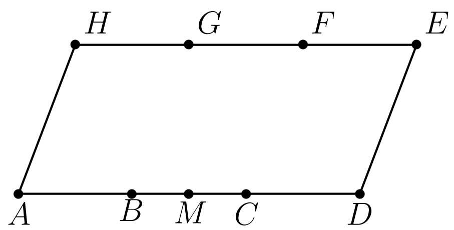
a) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{IJ}$ b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

1.1.16 Démontrer que l'égalité suivante est toujours vraie : $\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CA}-5\overrightarrow{CB}+3\overrightarrow{AB}$.

1.1.17 Représenter un carré $OABC$ puis construire les points E, F, G et H tels que :

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC},\quad \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OC},\quad \overrightarrow{CG}=2\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BO}\quad \text{et}\quad \overrightarrow{OH}=-\sqrt{2}\,\overrightarrow{OB}.$$

1.1.18 Sur le parallélograme de la figure, les points G et F divisent le segment HE en trois parties égales, les points B et C divisent le segment AD en trois parties égales et M est le milieu de BC.
Donner un représentant de chaque vecteur colinéaire à $\overrightarrow{HG}$

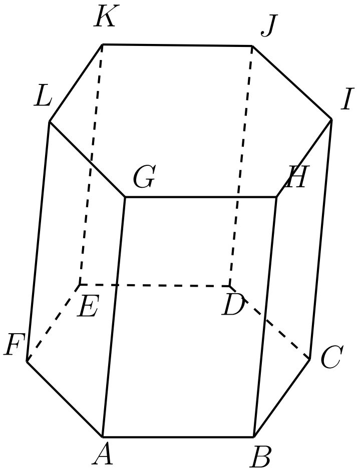


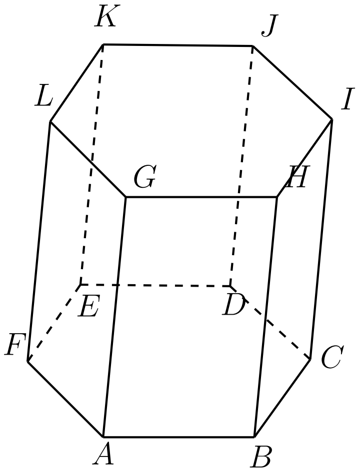
1. une pyramide à base triangulaire.

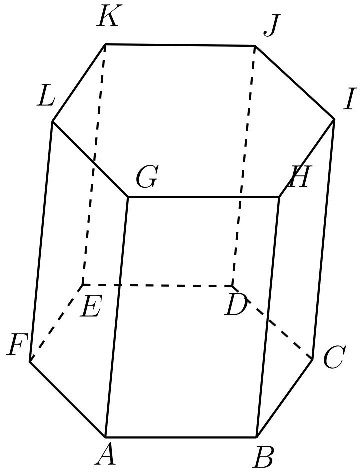
1.2 Repères, bases et combinaisons linéaires

1.2.1 On considère un prisme $ABCDEF\ GHIJKL$ dont les bases sont des hexagones réguliers. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les trois vecteurs donnés sont coplanaires. Le cas échéant, exprimer l'un d'eux comme combinaisons linéaires des deux autres.

a) $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{LG}$, $\overrightarrow{ID}$, $\overrightarrow{KB}$ c) $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{JD}$, $\overrightarrow{HI}$

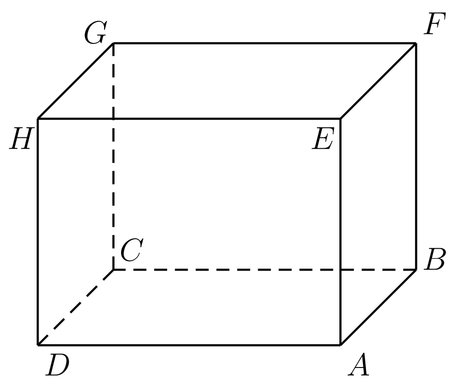




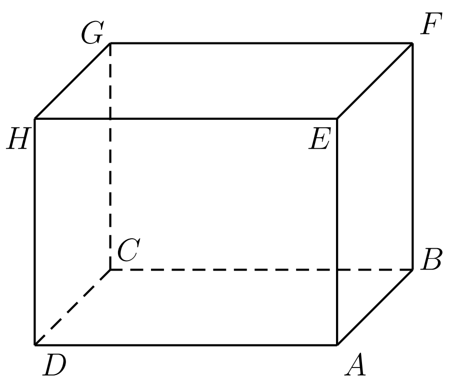


1.2.2 Soit une pyramide de sommet S dont la base $ABCD$ est un parallélogramme. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{SB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{SC}$. Réaliser une bonne figure d'étude. Exprimer chacun des vecteurs suivants comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$: $\overrightarrow{SD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

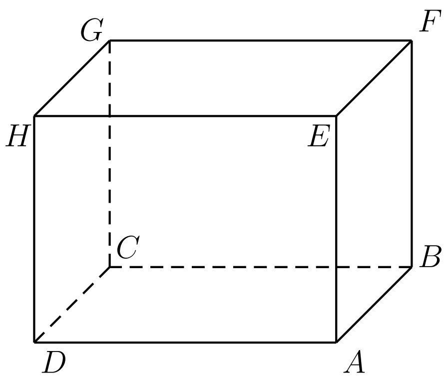
1.2.3 On considère le parallélépipède $ABCD\ EFGH$ représenté sur la figure. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les trois vecteurs donnés sont coplanaires. Si tel est le cas, exprimer chacun des trois vecteurs comme combinaison linéaire des deux autres.



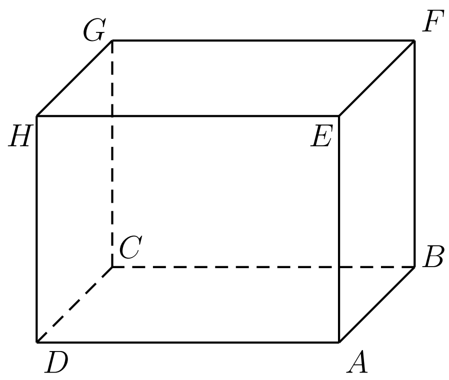
a) $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{DG}$



b) $\overrightarrow{GF}$, $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{CD}$

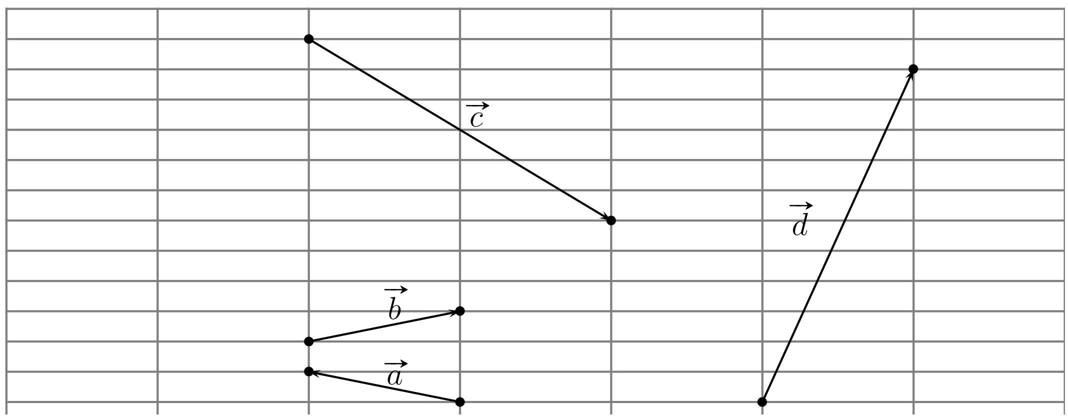


c) $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{AB}$

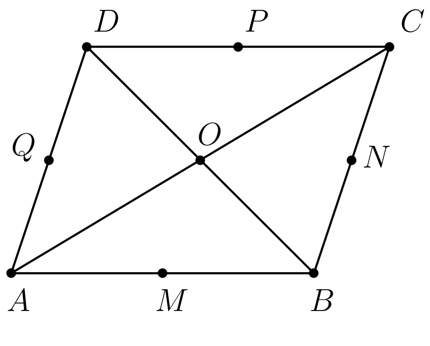


d) $\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{GH}$

1.2.4 Exprimer les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ comme combinaison linéaire de $\vec{c}$ et $\vec{d}$ si :



1.2.5 Les points M, N, P et Q sont les milieux des côtés du parallélogramme $ABCD$.

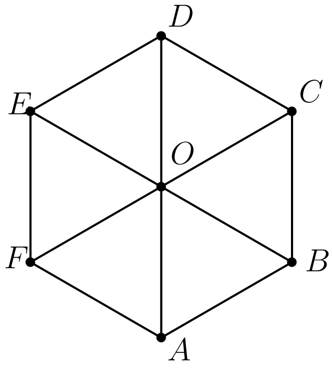


a) Donner, dans la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}\right)$, les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AQ}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$,$\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{QP}$ et $\overrightarrow{CM}$

b) Mêmes questions, mais relativement à la base $\mathfrak{B}_2 = \left(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AM}\right)$

1.2.6 Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de centre O. Donner les composantes des vecteurs

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{FA},\ \overrightarrow{EA},\ \overrightarrow{EC},\ \overrightarrow{DB},\ \overrightarrow{EB},\ \overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OD},\ \overrightarrow{OE}$$



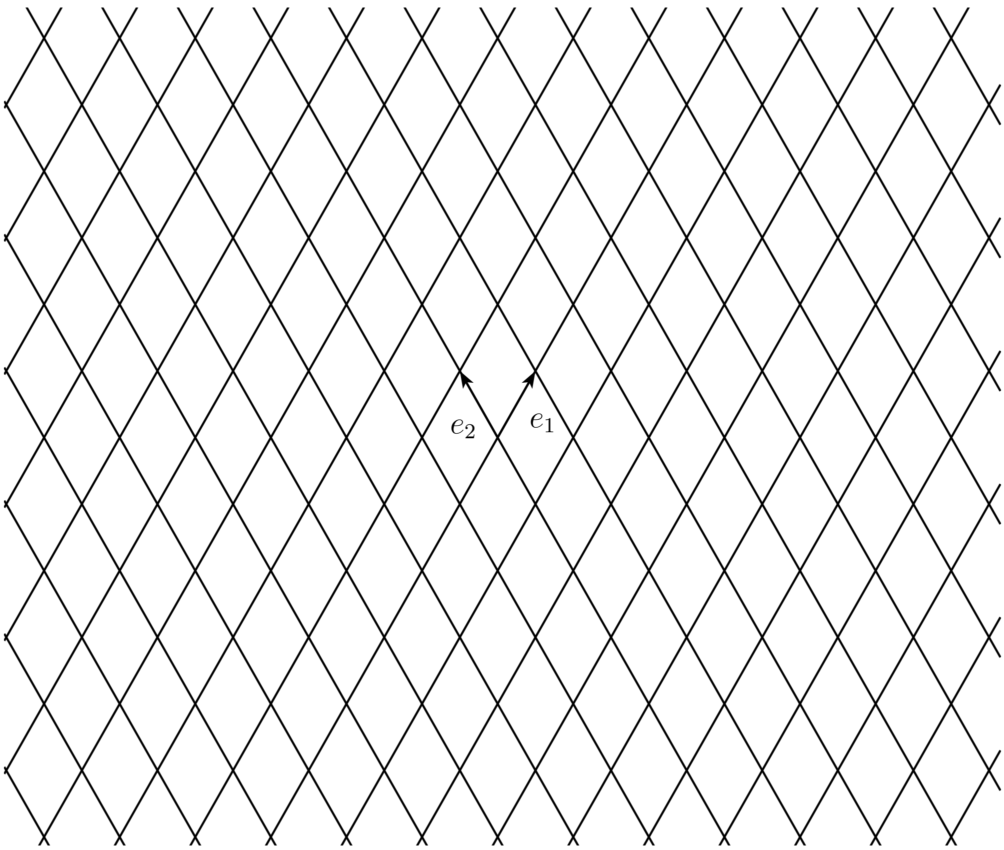
a) dans la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}\right)$

b) dans la base $\mathfrak{B}_2 = \left(\overrightarrow{EF}; \overrightarrow{ED}\right)$

c) dans la base $\mathfrak{B}_3 = \left(\overrightarrow{EA}; \overrightarrow{EC}\right)$

d) dans la base $\mathfrak{B}_4 = \left(\overrightarrow{OE}; \overrightarrow{AB}\right)$

1.2.7 On considère la figure suivante



a) Représenter les vecteurs suivants, dont les composantes sont données relativement à la base $\mathfrak{B} = (\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2})$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 9/4 \end{pmatrix}$$

b) Représenter les vecteurs $\vec{b} + \vec{c}$ et $3\,\vec{b} + 2\,\vec{c}$ et donner leurs composantes dans $\mathfrak{B}$.

1.2.8 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les composantes des vecteurs suivants :

a) $3\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$

b) $\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

c) $-5\vec{a} - 3\vec{b} - 8\vec{c}$

1.2.9 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Calculer les nombres k et m tels que $k\vec{a} + m\vec{b} = \vec{c}$.

1.2.10 Soit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1.8 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

Calculer les composantes du vecteur $\vec{x}$ si

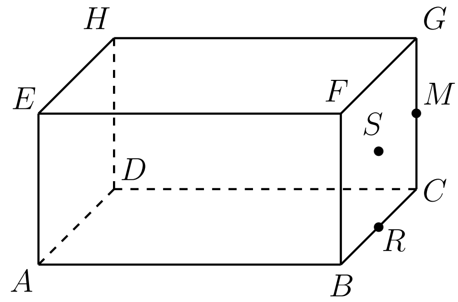
$$\frac{3\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}}{4} - \frac{3\vec{a}}{8} = 0.9\left(\frac{\vec{x}}{12} + \frac{5}{3}\vec{b}\right) - 2\vec{a}.$$

1.2.11 Soit $\mathfrak{B} = (\vec{e_1};\ \vec{e_2})$ une base de V_2 et $\mathfrak{B}' = \left(\vec{a};\vec{b}\right)$ une autre base de V_2. On donne les composantes de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ relativement à la base $\mathfrak{B}$: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Donner les composantes de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ dans la base $\mathfrak{B}$.

b) Donner les composantes de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ dans la base $\mathfrak{B}'$.

1.2.12 On considère un parallélépipède $ABCDEFGH$ de centre K. Les points M et R sont les milieux respectifs des arêtes $[CG]$ et $[BC]$ et S est le centre de la face $BCGF$.



a) Donner, relativement à la base $\mathfrak{B}_1 = \left(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AD};\ \overrightarrow{AE}\right)$ les composantes des vecteurs

$$\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE},\ \overrightarrow{AF},\ \overrightarrow{AG},\ \overrightarrow{AH},\ \overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AS},\ \overrightarrow{AR},\ \overrightarrow{AK}.$$

b) Mêmes questions relativement à la base $\mathfrak{B}_2 = \left(\overrightarrow{CM};\ \overrightarrow{CD};\ \overrightarrow{BR}\right)$

1.2.13 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_3, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

.

a) Former le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} + 2\vec{a} = \vec{b} - 2\vec{c}$.

b) Déterminer le vecteur $\vec{t}$ tel que $5\vec{t} - \vec{a} = \frac{3}{2}\left(2\vec{c} - \frac{3}{2}\vec{t}\right) + \frac{5}{6}\vec{b}$

1.2.14 Exprimer le vecteur $\vec{v}$ comme combinaison linéaire de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ si :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -16 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 52 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 21 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

1.3 Alignement, colinéarité, coplanarité et milieux

1.3.1 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on considère les vecteurs :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \ \vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}, \ \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3/2 \end{pmatrix}, \ \vec{h} = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 1/3 \end{pmatrix}, \ \vec{i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Regrouper les vecteurs qui sont colinéaires.

1.3.2 Déterminer m pour que les vecteurs suivants soient colinéaires :

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ m+4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} m \\ m+4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ m-1 \end{pmatrix}$

1.3.3 Relativement à une base $\mathfrak{B}$ de V_2, on donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer un nombre réel λ et un vecteur $\vec{x}$ colinéaire à $\vec{a}$ tels quel $\vec{x} + \lambda\vec{b} = \vec{c}$

1.3.4 Déterminer dans chaque cas si les trois vecteurs sont coplanaires :

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3/4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

1.3.5 Déterminer k pour que les vecteurs suivants soient coplanaires :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

1.3.6 Calculer les vecteurs qui sont à la fois coplanaire à $\vec{a}$ et $\vec{b}$ et coplanaires à $\vec{d}$ et $\vec{f}$, si

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}, \ \vec{d} = \begin{pmatrix} 35 \\ 14 \\ -10 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

1.3.7 On donne les points $A(5;2;-3)$, $B(8;0;5)$, $C(-2;-4;1)$ et $D(4;-6;3)$. Calculer les composantes des vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{CA}$

d) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

e) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

f) $4\overrightarrow{CD}-3\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}\right)$

1.3.8 On donne les points $A(1;1)$, $B(10;5)$ et $C(4;12)$. Calculer les coordonnées du point D tel que :

a) $ABCD$ soit un parallélogramme

b) $ABDC$ soit un parallélogramme

1.3.9 Calculer les coordonnées des points qui divisent le segment $[AB]$ en cinq parties égales, si $A(2;3)$ et $B(3;8)$.

1.3.10 On donne les sommets $A(3;-2;5)$ et $B(7;5;10)$ d'un parallélogramme $ABCD$, ainsi que le point d'intersection $P(5;4;6)$ de ses diagonales. Calculer les coordonnées des deux autres sommets C et D.

1.3.11 Les points M, N et P suivants sont-ils alignés ?

$$M(13;-22;2) \qquad N(-5;-10;26) \qquad P(-38;12;60)$$

1.3.12 Déterminer dans chaque cas la constante k pour les points A, B et C soient alignés :

a) $A(1;2)$, $B(-3;3)$ et $C(k;1)$

b) $A(2;k)$, $B(7k-29;5)$ et $C(-4;2)$.

1.3.13 On donne trois points A, B et C. Déterminer, dans les cas suivants, le nombre réel α pour qu'ils soient alignés :

a) $A(2;3;5)$, $B(3;5;8)$, $C(5;9;\alpha)$.

b) $A(\alpha;-3;-4)$, $B(3;1;0)$, $C(0;\alpha+2;\alpha+1)$.

1.3.14 On donne $A(7;-3)$ et $B(23;-6)$. Déterminer le point C de l'axe Ox qui est aligné avec A et B.

1.3.15 Soit $A(-2;14)$, $B(6;-2)$, $C(4;-2)$ et $D(6;10)$. Déterminer le point P d'intersection des droites AB et CD.

1.3.16 Les droites AB et CD de l'espace sont-elles confondues, strictement parallèles, sécantes ou gauches ? Traiter les cas ci-dessous :

a) $A(6;4;-4) \quad B(4;0;-2) \quad C(7;0;-2) \quad D(11;-4;0)$;

b) $A(-4;2;1) \quad B(-1;1;3) \quad C(0;5;2) \quad D(9;2;4)$;

c) $A(8;0;3) \quad B(-2;4;1) \quad C(8;3;-2) \quad D(0;0;5)$;

d) $A(2;-3;1) \quad B(3;-2;3) \quad C(0;-5;-3) \quad D(5;0;7)$?

1.3.17 On donne les points $A(3;2)$, $B(-5;6)$ et $C(-2;-3)$.
Trouver les coordonnées des points situés respectivement au quart de AB depuis A, aux deux tiers de BC depuis B.

1.3.18 Les points $M(2;-1)$, $N(-1;4)$ et $P(-2;2)$ sont les milieux des côtés d'un triangle dont on demande de calculer les sommets.

1.3.19 Soit les points $A(-4;2)$, $B(1;3)$ et $C(2;5)$. Calculer les coordonnées des milieux des côtés du triangle ABC et celles du centre de gravité de ce triangle.

1.3.20 On donne trois points A, B et C. Calculer les coordonnées du sommet D du parallélogramme $ABCD$, celles des milieux M, N, P et Q des côtés AB, BC, CD, DA ainsi que celles des centres de gravité G_1 et G_2 des triangles ABC et CDA.

$$A(-4;1;3) \quad B(4;3;6) \quad C(4;-6;3)$$

1.3.21 On considère les points $A(2;-1)$ et $B(0;3)$.

a) Déterminer le point C tel que le centre de gravité du triangle ABC soit l'origine O du repère.

b) Déterminer ensuite le point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

1.4 Produit scalaire et norme

1.4.1 Calculs de normes

a) Calculer la norme des vecteurs du plan ou de l'espace :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 6/10 \\ -4/5 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} .$$

b) Etablir que les vecteurs suivants sont unitaires : $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 6/\sqrt{45} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 2/-3 \end{pmatrix}$.

c) On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer

$$\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| + \|\vec{c}\|; \|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\|; \| - 2\vec{a}\| + 2\|\vec{a}\|; \|\vec{a}\|\vec{c}; \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}; \left\| \frac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a} \right\|$$

d) On donne $\vec{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ k-1 \end{pmatrix}$. Calculer le nombre k sachant que la norme de $\vec{d}$ vaut 10.

e) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Calculer le nombre m tel que

$$\|\vec{u} + m\vec{v}\| = \sqrt{82}$$

1.4.2 Calculer le périmètre du triangle ABC si $A(2;1;3)$, $B(4;3;4)$ et $C(2;6;-9)$.

1.4.3 Etablir que le triangle ABC est isocèle, puis calculer son aire si $A(6;4)$, $B(12;-2)$ et $C(17;9)$.

1.4.4 Soit $A(7;1)$, $B(5;5)$, $C(5;-3)$ et $I(2;1)$. Prouver que les points A, B et C sont situés sur le même cercle centré en I.

1.4.5 Déterminer k pour que $P(2;-1)$ soit situé sur la médiatrice du segment AB, si $A(5;3)$ et $B(-2;k)$.

1.4.6 Soit $A(1;2)$, $B(3;8)$ et $P(x;y)$. A quelle condition sur x et y le point P est-il situé sur la médiatrice de AB ?

1.4.7 Déterminer le centre du cercle passant par les points $K(-3;6)$, $L(9;-10)$ et $M(-5;4)$.

1.4.8 On considère deux vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Trouver une condition géométrique qui assure que $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$.

1.4.9 Indiquer dans chacun des cas si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 53 \\ -41 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 41 \\ 53 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 16 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

1.4.10 Indiquer dans chacun des cas si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$

1.4.11 Résoudre les problèmes suivants :

a) Calculer m, sachant que les vecteurs $\begin{pmatrix} m \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont perpendiculaires.

b) Soit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le nombre k pour lequel les vecteurs $\vec{a} + k\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont perpendiculaires.

c) On donne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 11 \end{pmatrix}$. Déterminer un vecteur $\vec{w}$ et un nombre k, de telle sorte que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient perpendiculaires et que $\vec{v} = k\vec{u} + \vec{w}$.

d) Déterminer a et b pour que le vecteur $\begin{pmatrix} 7 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ soit à la fois orthogonal à $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ et à $\begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$.

1.4.12 Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze rectangle en A, puis calculer son aire, si $A(7;5)$, $B(8;7)$, $C(12;5)$ et $D(13;2)$.

1.4.13 Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle, si $A(-4;5;3)$, $B(-1;1;5)$, $C(5;5;4)$ et $D(2;9;2)$.

1.4.14 On donne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Evaluer les expressions suivantes lorsqu'elles sont définies :

a) $\vec{a} \cdot \left(7\vec{b} + \vec{c}\right)$

b) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)\vec{b}$

c) $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) + \left(\vec{c} \cdot \vec{d}\right)$

d) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} - \vec{d}\right)$

e) $\|\vec{d}\| \left(\vec{a} \cdot \vec{d}\right)$

f) $\vec{a} + \left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right)$

1.4.15 Considérons un losange $ABCD$ dans lequel on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$. Prouver que $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont perpendiculaires.

1.4.16 On donne les points $A(-2;4)$, $B(1;-2)$ et $C(\lambda;\lambda)$. Déterminer λ pour que le triangle ABC soit rectangle

a) en A ;

b) en B ;

c) en C ;

Représenter ensuite les solutions sur une figure à l'échelle.

1.4.17 On donne les points $A(1;4)$, $B(5;2)$ et le point $C(k;5)$, $k \in \mathbb{R}$. Déterminer tous les points C du plan tels que le triangle de sommets A, B et C soit un triangle rectangle. Parmi les triangles trouvés, en est-il qui sont isocèles ?

1.4.18 On donne les points $A(-2;3;-2)$ et $B(-6;-1;1)$. Calculer le point P qui est situé sur l'axe Ox et tel que le triangle APB soit rectangle en P.

1.4.19 Les droites AB et CD de l'espace sont dites **orthogonales** si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont perpendiculaires. Des droites orthogonales peuvent être gauches ou sécantes. Dans ce dernier cas, on dit que les droites sont **perpendiculaires**.
Examiner dans chacun des cas si les droites AB et CD sont perpendiculaires :

a) $A(8;-1;3)$, $B(11;11;5)$, $C(4;1;-1)$ et $D(6;0;2)$.

b) $A(1;3;5)$, $B(-2;4;1)$, $C(-2;2;-6)$ et $D(-10;10;2)$.

1.4.20 Soit $A(-7;-3)$, $B(11;3)$ et $C(1;-4)$. Calculer le point D qui est le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

1.4.21 Soit $A(-3;-1)$, $B(1;3)$, $C(-1;7)$ et $D(0;3)$. Déterminer le point P de la droite CD qui est situé à la même distance des points A et B.

1.4.22 Représenter les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sur une figure à l'échelle. Construire et calculer la projection de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$.

1.4.23 Représenter les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sur une figure à l'échelle, puis construire la projection $\vec{a}\,'$ de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$, ainsi que la projection $\vec{b}\,'$ de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$. Calculer les composantes des vecteurs $\vec{a'}$ et $\vec{b'}$.

1.4.24 Calculer dans chaque cas la longueur de la projection orthogonale de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

1.4.25 Calculer la projection $\vec{a}\,'$ de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$, ainsi que la projection $\vec{b}\,'$ de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$, si :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

1.4.26 Indiquer si l'angle formé par les deux vecteurs est aigu, obtus ou droit :

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.4.27 On donne les vecteurs

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Décomposer le vecteur $\vec{a}$ en une somme de deux vecteurs, le premier parallèle à $\vec{b}$, le second perpendiculaire à $\vec{b}$.

1.4.28 Calculer l'angle aigu formé par les droites AB et CD, si $A(1;5)$, $B(7;3)$, $C(2;1)$ et $D(-3;1)$.

1.4.29 On considère un cube $ABCD\ EFGH$. Notons M, N et P les milieux respectifs de AE, EH et AB. Calculer l'angle entre les vecteurs suivants :

a) $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BG}$;

b) $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BH}$;

c) $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.

1.4.30 L'aire du triangle ABC vaut 3 et le centre de gravité de ce triangle est situé sur l'axe Ox. Calculer le sommet C, connaissant $A(3;1)$ et $B(1;-3)$.

1.4.31

On donne les points $A(-2;-1)$, $B(7;0)$ et $C(1;5)$.

Calculer les coordonnées du quatrième sommet du parallélogramme $ABCD$.

1.4.32

Trouver les coordonnées du troisième sommet C d'un triangle ABC dont on donne deux sommets $A(6;-1)$, $B(-2;6)$ et le centre de gravité $G(3;4)$.

1.4.33
On donne les points $A(4;0)$, $B(0;6)$, $C(6;10)$ et $D(-2;-4)$.

a) Calculer les coordonnées des points M, R, S, T milieux respectivement de AB, BC, BD, AD.

b) Montrer que le quadrilatère $TMRS$ est un parallélogramme.

c) Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites TR et MS.

1.5 Produit vectoriel et produit mixte

1.5.1 On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les produits vectoriels $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$, $\vec{b} \times \vec{c}$, $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{b}$, $(2\vec{a}) \times \left(-3\vec{b}\right)$, $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - \vec{b}\right)$, $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$ et $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$.

b) Le produit vectoriel est-il associatif ?

1.5.2 Former un vecteur normal au plan ABC, si $A(0;2;1)$, $B(0;1;0)$ et $C(1;0;2)$.

1.5.3 Simplifier l'expression $\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) + \vec{b} \times (\vec{c} + \vec{a}) + \vec{c} \times \left(\vec{a} + \vec{b}\right)$

1.5.4 On donne les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. Existe-t-il un vecteur $\vec{x}$ tel que $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$?

1.5.5 Calculer l'angle aigu que forme la droite OC avec le plan ABC, dans les cas suivants :

a) $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$ et $C(2;2;-4)$.

b) $A(0;1;0)$, $B(1;0;1)$ et $C(1;2;2)$.

1.5.6 On donne un tétraèdre de sommets $A(1;-5;2)$, $B(3;-6;0)$, $C(-3;6;15)$ et $D(6;5;-3)$.

a) Calculer l'angle aigu que forment les faces ABC et ABD.

b) Calculer l'angle aigu que forme l'arête AD avec la face ABC.

1.5.7 On considère les vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$. Vérifier avec ces vecteurs l'identité de Lagrange.

1.5.8

a) Vérifier que $ABCD$ est un parallélogramme et calculer son aire avec $A(2;1;-2)$, $B(2;3;0)$, $C(6;6;5)$, $D(6;4;3)$.

b) Calculer l'aire du triangle ABC si $A(3;-2;3)$, $B(4;0;3)$ et $C(6;0;-3)$.

c) Déterminer la longueur de la hauteur issue de A dans la triangle ABC où $A(-1;2;-5)$, $B(5;4;0)$ et $C(11;8;3)$.

d) Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs de l'espace. Prouver algébriquement que le rapport de l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}+\vec{b}$ et $\vec{a}-\vec{b}$ avec celle du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est égal à 2.

e) On considère un cube $ABCD\ EFGH$ dont les arêtes mesurent a. On désigne par M le milieu de l'arête AE. Exprimer l'aire du triangle MCH en fonction de a.

1.5.9

a) Les vecteurs suivants sont-ils coplanaires : $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -11 \end{pmatrix}$?

b) Les points ci-dessous sont-ils coplanaires ?

$$A(0;3;-2), \quad B(1;2;2), \quad C(-3;1;5), \quad D(12;-3;5)$$

c) Déterminer k pour que les vecteurs ci-dessous soient coplanaires.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$$

d) Déterminer sur l'axe Oz un point coplanaire à $A(1;1;1)$, $B(0;-2;3)$, $C(4;1;-1)$.

e) Calculer $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]$, si $A\left(\frac{1}{2};\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{5}{6};\frac{1}{6};\frac{-1}{2}\right)$, $C\left(\frac{5}{4};-1;\frac{5}{4}\right)$ et $D\left(\frac{3}{2};\frac{-1}{10};\frac{-1}{10}\right)$.

1.5.10 Soit $(\vec{e_1};\vec{e_2};\vec{e_3})$ une base orthonormée directe de l'espace. Les triplets suivants sont-ils orientés positivement ou négativement ?

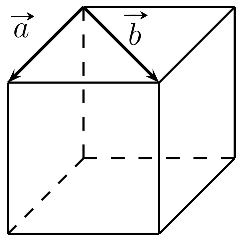
a) $(\vec{e_1};\vec{e_3};\vec{e_2})$;

b) $(\vec{e_2};-\vec{e_3};\vec{e_1})$;

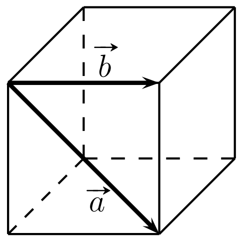
c) $(-\vec{e_2};\vec{e_1};\vec{e_3})$.

1.5.11 Le cube dessiné a des arêtes de longueur 1. Représenter le vecteur :

a) $\vec{a} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$



b) $\left(\vec{b} \times \vec{a}\right) \times \vec{b}$



1.5.12 Représenter graphiquement des vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, avec $\vec{b} \neq \vec{c}$ pour lesquels $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$.

1.5.13 Déterminer k et $\vec{x}$ de telle sorte que $\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b}$, si $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} k \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1.5.14 Illustrer l'affirmation suivante :
« Si $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan α et si $\vec{m}$ est un vecteur normal au plan β, alors $\vec{n} \times \vec{m}$ est un vecteur directeur de la droite d'intersection de α et β (les deux plans sont supposés sécants). »

1.5.15 Calculer la distance du point $P(1;2;2)$ à la droite passant par $A(1;-1;2)$ et $B(0;-2;1)$.

1.5.16 Pour visser ou dévisser un boulon centré au point B à l'aide d'une clé, on exercice une force sur l'extrémité M du manche de la clé (dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation du boulon). L'efficacité de cette force à faire tourner le boulon dépendra alors de la longueur du manche, de l'intensité de la force exercée. ainsi que de l'angle de la force par rapport au manche.
Désignons la force $\vec{f}$, posons $\vec{l} = \overrightarrow{BM}$, et notons Ψ l'angle des vecteurs $\vec{f}$ et $\vec{l}$. Les physiciens ont établi que l'efficacité de la force à faire tourner le boulon est proportionnelle à $\|\vec{f}\| \cdot \|\vec{l}\| \cdot \sin\Psi$.
On définit que le vecteur $\vec{m} = \vec{l} \times \vec{f}$ est le **moment de force** déterminé par $\vec{f}$ et $\vec{l}$.
Réaliser une bonne figure illustrant les divers éléments ci-dessus.
Quelle est la direction de $\vec{m}$? Dans quel sens est le vecteur $\vec{m}$? Que vaut la norme de $\vec{m}$?

1.5.17 Démontrer les formules de calcul de volume pour le parallélépipède et pour le tétraèdre.
Indications pour la première formule : on considère comme base le parallélogramme construit sur $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$, et comme hauteur le vecteur obtenu en projetant $\overrightarrow{c}$ sur $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$.

1.5.18

a) Vérifier que $ABCD\ EFGH$ est un parallélépipède et calculer son volume si :

$A(-1;-1;7)$	$C(0;1;6)$	$E(2;-2;3)$	$G(3;0;2)$
$B(-2;1;6)$	$D(1;-1;7)$	$F(1;0;2)$	$H(4;-2;3)$

b) Calculer le volume du tétraèdre $PQRS$ si

$$P(2;-1;1), \quad Q(5;5;4), \quad R(3;2;-1), \quad S(4;1;3).$$

c) Soit $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Déterminer un point D situé sur l'axe Oy tel que le tétraèdre $ABCD$ ait un volume égale à 5.

d) Calculer la hauteur issue de D dans le tétraèdre $ABCD$ si :
$A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$.

1.5.19 Soit ABC un triangle dont les côtés mesurent a, b et c. La formule de Héron donne l'aire S du triangle :

$$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}, \text{ où } p = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Démontrer cette formule à l'aide de l'identité de Lagrange.

1.5.20 On donne les points

$A(1;4;1)$	$C(-5;-11;5)$	$Q(3;-11;-1)$
$B(-2;-8;3)$	$P(3;5;-1)$	$R(0;-3;1)$

Démontrer que les plans ABC et PQR sont parallèles.

1.6 Solutions des exercices

Propriétés des vecteurs dans le plan et l'espace

1.1.1 18 vecteurs :
$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{FC}$.

1.1.4

a) $\overrightarrow{AC}$
b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}$
c) $\overrightarrow{DC}$
d) $\overrightarrow{DA}$
e) $\vec{0}$

1.1.5

a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AH}$ c) $\overrightarrow{HA}$ d) $\overrightarrow{EA}$ e) $\overrightarrow{AC}$ f) $\overrightarrow{AE}$

1.1.6

a) $\overrightarrow{FE}$ b) $\overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{DB}$ e) $\overrightarrow{AD}$ f) $\overrightarrow{FC}$

1.1.9 $\vec{v} = \vec{a} + 3\vec{b}$

1.1.10

a) $2\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$

b) $2\overrightarrow{PQ} = 2(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CQ}) = \overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}$

1.1.11 a) $\vec{c} = 6\vec{a} - 2\vec{b}$ b) $\vec{d} = -\vec{a} - \vec{b}$ c) $\vec{x} = 2\vec{a} + 6\vec{b}$

1.1.13

a) $\overrightarrow{EP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$
b) $\overrightarrow{EM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$
c) $\overrightarrow{EN} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$
d) $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$
e) $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$
f) $\overrightarrow{NP} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$
g) $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}$

1.1.14

a) $\overrightarrow{PB} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$ b) $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}$ c) $\overrightarrow{DM} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

1.1.18 $\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{HF}, \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{FH}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{MA}$

Repères, bases et combinaisons linéaires

1.2.1

a) Oui. $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AJ} - \frac{1}{2}\overrightarrow{EK}$

b) Oui. $\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{ID} + 3\overrightarrow{LG}$

c) Non.

1.2.2

a) $\overrightarrow{SD} = \vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$

b) $\overrightarrow{AC} = -\vec{u} + \vec{w}$

c) $\overrightarrow{BD} = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$

d) $\overrightarrow{AB} = -\vec{u} + \vec{v}$

e) $\overrightarrow{BC} = -\vec{v} + \vec{w}$

f) $\overrightarrow{AD} = -\vec{v} + \vec{w}$

1.2.3

a) Oui. $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DG}$

b) Non.

c) Oui. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{EG}$

d) Oui. $\overrightarrow{GH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{DF} = -2\overrightarrow{GH} - \overrightarrow{EC}$

1.2.4

$\vec{a} = -\frac{3}{7}\vec{c} - \frac{1}{7}\vec{d}$; $\vec{b} = \frac{5}{14}\vec{c} + \frac{2}{7}\vec{d}$

1.2.5

a) $\overrightarrow{AB} = (1;0)$, $\overrightarrow{AD} = (0;1)$, $\overrightarrow{AM} = (1/2;0)$, $\overrightarrow{AQ} = (0;1/2)$ $\overrightarrow{AN} = (1;1/2)$,
$\overrightarrow{AP} = (1/2;1)$, $\overrightarrow{AO} = (1/2;1/2)$, $\overrightarrow{OB} = (1/2;-1/2)$, $\overrightarrow{QP} = (1/2;1/2)$,
$\overrightarrow{CM} = (-1/2;-1)$.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AO} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1.2.6

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

d) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.2.7 b) $\vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $3\vec{b} + 2\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

1.2.8

a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -\frac{11}{4} \\ 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -41 \\ 27 \end{pmatrix}$

1.2.9 $k = 3, m = 2$

1.2.10 $\begin{pmatrix} -98 \\ 20 \end{pmatrix}$

1.2.11

a) $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$ $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}}$

b) $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}'}$ $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathfrak{B}'}$

1.2.12

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$

$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$

$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$

$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$

1.2.13

a) $\vec{v} = (-3; 13; -7)$

b) $\vec{t} = (54/29; -34/29; 14/29)$

1.2.14

a) $\vec{v} = 4 \cdot \vec{a} + 5 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{c}$

b) $\vec{v} = 1 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b} + 2 \cdot \vec{c}$

c) $\vec{v} = (-t - 14) \cdot \vec{a} + (7 - t) \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} \qquad t \in \mathbb{R}$

d) Il n'est pas possible d'exprimer le vecteur $\vec{v}$ comme combinaison linéaire des trois autres.

Alignement, colinéarité, coplanarité et milieux

1.3.1 $\vec{a} = 1/2\,\vec{d} = 9\,\vec{h}$; $\vec{b} = -3/2\,\vec{\imath}$; $\vec{c} = -2\,\vec{g}$; $\vec{f}$; $\vec{e}$

1.3.2 a) $m = -14$ b) $m = 6$ ou $m = -2$

1.3.3 $\lambda = 35/29$ et $\vec{x} = (105/29; -30/29)$

1.3.4

a) Les vecteurs sont coplanaires.

b) Les vecteurs sont coplanaires.

c) Les vecteurs ne sont pas coplanaires.

d) Les vecteurs ne sont pas coplanaires.

1.3.5 $k = 1/2$ ou $k = 3$

1.3.6 Les vecteurs sont de la forme $k \cdot (65, 29, -10)$ avec $k \in \mathbb{R}$.

1.3.7

a) $(3; -2; 8)$

b) $(-4; -6; -2)$

c) $(7; 6; -4)$

d) $(9; -4, 10)$

e) $(1; 8; -6)$

f) $(33; -14; 32)$

1.3.8

a) $(-5; 8)$

b) $(13; 16)$

1.3.9 $(2.2; 4)$ $(2.4; 5)$ $(2.6; 6)$ $(2.8; 7)$

1.3.10 $C = (7; 10; 7)$ $D = (3; 3; 2)$

1.3.11 Les points ne sont pas alignés.

1.3.12

a) $k = 5$

b) $k = 1$ ou $k = 32/7$

1.3.13

a) $\alpha = 14$

b) $\alpha = -3$ ou $\alpha = 5$

1.3.14 $C(-9; 0)$

1.3.15 $P(4.5, 1)$

1.3.16

a) Les droites sont sécantes.

b) Les droites sont gauches.

c) Les droites sont gauches.

d) Les droites sont strictement parallèles.

1.3.17 $(1;3)$, respectivement $(-3;0)$

1.3.18 $A(-5;7)$, $B(1;-3)$, $C(3;1)$

1.3.19 $M_{AB}(-3/2;5/2)$, $M_{AC}(-1;7/2)$, $M_{BC}(3/2;4)$, $G(-1/3;10/3)$

1.3.20 $D(-4;-8;0)$, $M(0;2;9/2)$, $N(4;-3/2;9/2)$, $P(0;-7;3/2)$, $Q(-4;-7/2;3/2)$, $G_1(4/3;-2/3;4)$, $G_2(-4/3;-13/3;2)$

1.3.21

a) $C(-2;-2)$

b) $D(0;-6)$

Produit scalaire et norme

1.4.1

a) $5\,;\ \sqrt{73}\,;\ \sqrt{26}/2\,;\ 1\,;\ 3\,;\ \sqrt{3}\,;\ 5$

b) Les vecteurs sont unitaires, car leur norme vaut 1.

c) $24\,;\ \sqrt{82}\,;\ 20\,;\ (-30;0)\,;\ (3/5;4/5)\,;\ 1$

d) $k \in \{-5;7\}$

e) $m \in \{-23/10;3/2\}$

1.4.2 $\sqrt{182}+16 \simeq 29.5$

1.4.3 Le triangle est isocèle car $\|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|$. Son aire vaut 48 unités carrées.

1.4.4 $\|\overrightarrow{IB}\| = \|\overrightarrow{IA}\| = \|\overrightarrow{IC}\| = 5$

1.4.5 $k=-4$ ou $k=2$

1.4.6 Il faut que $(x;y)$ satisfasse l'équation $x+3\,y=17$.

1.4.7 $(3;-2)$

1.4.8 Il faut que les vecteurs soient colinéaires.

1.4.9

a) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas perpendiculaires.

b) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

c) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

d) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas perpendiculaires.

1.4.10

a) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

b) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

c) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas perpendiculaires.

d) Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont perpendiculaires.

1.4.11

a) $m=10/3$

b) $k=4/7$

c) $\vec{w}=(-6;2)$ et $k=3$

d) $a=4$ et $b=-5$

1.4.12 En calculant les produits scalaires, on constate que $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}\perp\overrightarrow{AB}$. Le trapèze est donc rectangle en A. Son aire vaut 12.5 unités carrées.

1.4.14

a) 102

b) $(55;-11)$

c) 14

d) 50

e) 36

f) Pas défini.

1.4.16

a) $\lambda = 10$

b) $\lambda = -5$

c) $\lambda = -2$ ou $\lambda = 5/2$

1.4.17 Les points possibles sont : $C(1.5; 5)$, $C'(2; 5)$, $C''(4; 5)$, $C'''(6.5; 5)$.
Le triangle $AC''B$ est isocèle en C''.

1.4.18 Les points possibles sont :$P(-1; 0; 0)$ et $P'(-7; 0; 0)$

1.4.19

a) Les droites sont orthogonales mais pas perpendiculaires.

b) Les droites sont perpendiculaires. (Elles se coupent en $E(-5; 5; -3)$.)

1.4.20 $D(-0.1; -0.7)$

1.4.21 $P(1; -1)$

1.4.22 $\overrightarrow{p} = (3/2; 1/2)$

1.4.23 Les vecteurs s'écrivent : $\overrightarrow{a'} = (168/25; 224/25)$ et $\overrightarrow{b'} = (672/169; 280/169)$.

1.4.24

a) $23/5$

b) $18/\sqrt{17}$

1.4.25

a) $\overrightarrow{a'} = (0; 0)$ et $\overrightarrow{b'} = (0; 0)$

b) $\overrightarrow{a'} = (9/25; -12/25)$ et $\overrightarrow{b'} = (-3; 0)$

c) $\overrightarrow{a'} = (16/13; 0; -24/13)$ et $\overrightarrow{b'} = (8/9; 16/9; -16/9)$

1.4.26

a) L'angle est obtus.

b) L'angle est aigu.

1.4.27 $\vec{a} = (20/7; -5/7; 10/7) + (-6/7; -2/7; 11/7)$

1.4.28 $18.43\,^\circ$

1.4.29

a) $60\,^\circ$

b) $70.53\,^\circ$

c) $120\,^\circ$

1.4.30 $C(2;2)$ ou $C(5;2)$

1.4.31 $D(-8;4)$

1.4.32 $C(5;7)$

1.4.33

a) $M(5;5)$, $R(3;8)$, $S(-1;1)$. $T(1;-2)$

b) $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{TM} = (4;7)$ et les points ne sont pas alignés

c) $I(2;3)$

Produit vectoriel et produit mixte

1.5.1

a) $(-12;-4;8)$, $(-6;-13;4)$, $(16;-2;4)$, $(-12;-4;8)$, $(72;24;-48)$

$(24;8;-16)$, $(-36;52;-28)$, $(6;40;-4)$

b) Les deux derniers calculs de la question a) montrent que le produit vectoriel n'est pas associatif.

1.5.2 $(-3;-1;1)$

1.5.3 On sait que pour tous vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c} \in V_3$, la propriété de distributivité du produit vectoriel par rapport à l'addition s'applique :

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

On sait également que

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

On peut donc développer notre expression comme suit

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\vec{b}\times\left(\vec{c}+\vec{a}\right)+\vec{c}\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right) &= \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{b}\\ &= \vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{b}\\ &= \vec{a}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{c}\\ &= \vec{0}+\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}\end{aligned}$$

1.5.4 Non

1.5.5

a) $7.33\,^\circ$

b) $5.11\,^\circ$

1.5.6

a) $45\,^\circ$

b) $42.88\,^\circ$

1.5.8

a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(0;2;2)$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=(4;3;5)$ et l'aire vaut 12 unités carrées.

b) L'aire du triangle vaut 7 unités carrées.

c) La longueur vaut $22/\sqrt{61}$ unités.

d) –

e) L'aire du triangle est donnée par $3a^2/4$.

1.5.9

a) Oui

b) Non

c) $k=3$ ou $k=1/2$

d) $(0;0;19/9)$

e) $\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]=0$

1.5.10

a) Négativement

b) Négativement

c) Positivement

1.5.13 $k=-27$ et $\vec{x}$ est de la forme $(t/3+2;2\,t/3+9;t)$ avec $t\in\mathbb{R}$.

1.5.15 $\sqrt{6}$

1.5.18

a) Le volume du parallélépipède vaut 18 unités cubes.

b) Le volume du tétraèdre vaut 3 unités cubes.

c) Il y a deux points possibles : $D(0;-7;0)$ et $D'(0;8;0)$.

d) La hauteur vaut 11.

1.5.20 Il suffit de vérifier que les vecteurs perpendiculaires aux plans π_{ABC} et π_{PQR} sont colinéaires.

Pour ce faire, on calcule en premier lieu les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = (-3,\ -12,\ 2) \quad \overrightarrow{AC} = (-6,\ -15,\ 4)$$

On fait ensuite le produit vectoriel de ces deux vecteurs :

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-18,\ 0,\ -27)$$

On procède de même pour le plan passant par P, Q et R.

$$\overrightarrow{PQ} = (0,\ -16,\ 0) \quad \overrightarrow{PR} = (-3,\ -8,\ 2)$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (-32,\ 0,\ -48)$$

On voit bien que les deux vecteurs normaux sont colinéaires :

$$(-32,\ 0,\ -48) = \frac{16}{9} \cdot (-18,\ 0,\ -27)$$

Les deux plans sont donc parallèles.