Chapitre 1

Puissances, racines, exponentielles et logarithmes

1.1 Puissances et racines

1.1.1 Simplifier les expressions suivantes :

a) $2^4 \cdot 3^4$ b) $2^3 \cdot (-3)^3 \cdot 4^3$ c) $3^6 \cdot 5^6$

d) $5^0 \cdot 5^1 \cdot 5^2 \cdot ... \cdot 5^{10}$ e) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 15^3$ f) $\dfrac{5^8}{5^6}$

g) $\dfrac{5^6}{5^8}$ h) $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^5$ i) $\dfrac{7 \cdot 7^5 \cdot 7^0 \cdot 7}{7^3 \cdot 7^4}$

1.1.2 Simplifier les expressions suivantes :

a) $(2^2)^3$ b) $2^{(2^3)}$ c) $((-4)^2)^4$

d) $\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\right)^6$ e) $\left(-\dfrac{2^4}{3^3}\right)^2$ f) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 \div \left(\dfrac{5}{3}\right)^3$

g) $4^2 \cdot 2^5 \cdot 8^2$ h) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^4 \div \left(\dfrac{9}{8}\right)^4$ i) $\dfrac{(3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot 81)^5}{3^{50}}$

1.1.3 Calculer :

a) 4^{-2} b) 2^{-1} c) 3^{-3} d) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-1}$ e) $\left(\dfrac{-1}{2}\right)^{-2}$ f) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$

1.1.4 Le produit de tous les nombres de chaque ligne et de chaque colonne du tableau vaut 2^{14}. Remplir les cases manquantes :

2^{11}	2^{-2}		2^{8}
2^{0}			2^{3}
		2^{2}	2^{7}
2^{-1}		2^{10}	

1.1.5 Simplifier les expressions suivantes :

a) $2^4 \cdot 2^{-2} \cdot 2$ b) $(2^3)^{-5}$ c) $\dfrac{5^3}{5^{-2}}$

d) $((-1)^{-2})^{-3}$ e) $(2^{-1} \cdot 5^{-1})^{-1}$ f) $\left(\dfrac{11^{-2}}{11^8}\right)^{-5}$

g) $7^{-3} \cdot \dfrac{49}{7^8} \cdot 7$ h) $10'000 \cdot \dfrac{100}{100'000} \cdot 10^{-3}$ i) $\dfrac{1'280 \cdot 5^7 \cdot 125}{(0,2 \cdot 25)^3}$

1.1.6 Simplifier les expressions suivantes et écrivez-les sans fraction :

a) $x^2yz^3 \cdot 3xy \cdot 27x^3z^5$ b) $(2a^2b^3c)^4$ c) $\left(\dfrac{2r^3}{s}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{s}{r}\right)^3$ d) $\dfrac{(4x^2y^3)^5}{(2xy)^3} \div \dfrac{x^7}{(y^3)^4}$

e) $(u^{-2}v^3)^{-3}$ f) $\dfrac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2}$ g) $\left(\dfrac{x}{3}\right)^{-2} \div \left(\dfrac{x}{9}\right)^{-3}$ h) $\left(\dfrac{9y^3(3y^2)^{-2}}{(y^{-4})^{-3}}\right)^5$

1.1.7 Calculer :

a) $\sqrt{25}$ b) $\sqrt[3]{1'000}$ c) $\sqrt[4]{625}$ d) $\sqrt[5]{32}$ e) $\sqrt[6]{729}$

f) $\sqrt[3]{0,027}$ g) $\sqrt[3]{0,125}$ h) $\sqrt[3]{0,015625}$ i) $\sqrt{0}$ j) $\sqrt[3]{0,000008}$

1.1.8 Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt{24}$ b) $\sqrt{18}$ c) $\sqrt{243}$ d) $\sqrt{50}$ e) $\sqrt{300}$ f) $\sqrt{54}$

g) $\sqrt{125}$ h) $\sqrt{147}$ i) $\sqrt{80}$ j) $\sqrt{1'000}$ k) $\sqrt{250}$ l) $\sqrt{7'000}$

m) $3\sqrt{5} - 4\sqrt{20} + 5\sqrt{45} - 3\sqrt{80}$ n) $2\sqrt{40} - 2\sqrt{90} + \sqrt{4'000} - 5\sqrt{10}$

1.1.9 Effectuer et réduire :

a) $(9\sqrt{12}+3)(\sqrt{3}+8)$ b) $(4\sqrt{3}+\sqrt{45})(\sqrt{5}-2\sqrt{27})$

c) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ d) $(\sqrt{3}+1)^4$

1.1.10 Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt[3]{\sqrt{7}}$ b) $\sqrt[3]{2^{18}\cdot 5^{12}\cdot 3^3}$ c) $\sqrt[4]{64}\cdot\sqrt[4]{4}$ d) $\sqrt[5]{3^{15}}$ e) $\left(\sqrt[8]{\sqrt[4]{\sqrt{2}}}\right)^{128}$

f) $\sqrt{3\sqrt{3}}$ g) $\sqrt[3]{5\sqrt{5\sqrt{5}}}$ h) $\sqrt{2\sqrt[3]{2}}$ i) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3^4\sqrt[3]{3^6}}}$ j) $\sqrt[3]{2\sqrt[6]{\dfrac{2^{14}}{\sqrt[3]{2^6}}}}$

1.1.11 Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt[5]{a^3}\cdot(\sqrt[5]{a})^2$ b) $\sqrt[3]{a}\cdot(\sqrt[3]{a})^2$ c) $\sqrt[5]{a^3}\cdot(\sqrt[5]{a^2})^6$ d) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^4}$

e) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{a^3}\cdot(\sqrt[10]{a})^4$ f) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a}$ g) $\sqrt{\sqrt[3]{a}}$ h) $\left(\sqrt[10]{\sqrt[5]{a}}\right)^{15}$

i) $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}}$ j) $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[4]{a^3}}$ k) $\dfrac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a^3}}$ l) $\dfrac{a^3}{\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a}}$

1.1.12 Rendre rationnel les dénominateurs et simplifier les expressions :

a) $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt[4]{5}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$

1.1.13 Écrire à l'aide d'exposants rationnels :

a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $\sqrt[10]{7}$ c) $-\sqrt[8]{7^2}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ f) $\dfrac{8}{\sqrt[7]{4^3}}$ g) $\sqrt[4]{5}$ h) $\sqrt[7]{3^7}$

1.1.14 Écrire à l'aide de racines et d'exposants entiers positifs :

a) $7^{\frac{3}{2}}$ b) $3^{\frac{2}{5}}$ c) $64^{\frac{3}{2}}$ d) $-11^{0,25}$ e) $36^{-\frac{1}{2}}$ f) $8^{-\frac{7}{5}}$ g) $27^{-\frac{1}{3}}$ h) $(-3)^{0,5}$

1.1.15 Calculer sans l'aide de la machine :

a) $\sqrt[4]{16^3}$ b) $(5+16^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ c) $4\cdot 25^{\frac{3}{2}}$ d) $(4\cdot 25)^{\frac{3}{2}}$

e) $19-27^{\frac{1}{3}}$ f) $(19-27)^{\frac{1}{3}}$ g) $(-32)^{\frac{1}{5}}$ h) $(32)^{-\frac{1}{5}}$

1.1.16 Calculer :

a) $8^{\frac{2}{3}}+16^{\frac{1}{2}}+27^{\frac{2}{3}}+81^{\frac{1}{4}}-125^{\frac{1}{3}}-1'000^{\frac{2}{3}}$ b) $(3\cdot 32^{\frac{1}{3}}+3\cdot 108^{\frac{1}{3}}-256\cdot 2^{\frac{2}{3}})\cdot 2^{\frac{1}{3}}$

c) $(3\cdot 2^{0,25}+2\cdot 32^{0,25}-8^{0,75})\cdot 8^{0,25}$ d) $\dfrac{16^{\frac{1}{3}}-4\cdot 128^{\frac{1}{3}}+3\cdot 250^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$

1.1.17 Simplifier les expressions suivantes et écrivez-les sans fraction :

a) $u^{4/3}u^{-3/2}u^{1/6}$

b) $(a^{-2/3}b^{-1}c^2)^{-3/2}\cdot(a^{-1/2}b^{1/3}c)^{-2}$

c) $\left(\dfrac{x^{-2/3}y^{3/4}}{x^{5/2}y^{2/3}}\right)^{1/5}\div\left(\dfrac{x^4y^{-2}}{x^{1/3}y^{-2/5}}\right)^{2/3}$

1.2 Exponentielles et logarithmes

1.2.1 Résoudre les équations ci-dessous :

a) $7^{x+6}=7^{3x+4}$

b) $6^{7-x}=6^{2x+1}$

c) $3^{2x+3}=3^{(x^2)}$

d) $9^{(x^2)}=3^{3x+2}$

e) $2^{-100x}=0,5^{x-4}$

f) $(\dfrac{1}{4})^{6-x}=4$

g) $27^{x-1}=9^{2x-3}$

h) $2^x\cdot 4^x=-5$

i) $(5^{x-2})^4=125\cdot 5^{5x-3}$

j) $(3^{x-1})^3=9\cdot 3^{x-2}$

k) $3^{4x+2}-36\cdot 3^{2x+1}=-243$

l) $5\cdot 5^{4x-7}-120\cdot 5^{2x-3}=625$

1.2.2 Calculer à la main :

a) $\log_3(1)$ b) $\log_2(8)$ c) $\log_2(64)$ d) $\log_2(1'024)$

e) $\log_5(5)$ f) $\log_3(\sqrt{3})$ g) $\log_{243}(1/243)$ h) $\log_3(27)$

i) $\log(1'000)$ j) $\log_4(\sqrt{2})$ k) $\log_{1/8}(64)$ l) $\log_5(0,04)$

m) $\log_3(\sqrt[4]{27})$ n) $\ln(e^2)$ o) $\log_a(a)$ p) $\log_a(a^3)$

q) $\log(10000)$ r) $\ln(e)$ s) $\log_2(1/8)$ t) $\log_3(\sqrt[4]{3})$

u) $\log(200) - \log(2)$ v) $\log_6(4) + \log_6(9)$ w) $\log_5(1)$ x) $\log(-1)$

y) $\log(0.0001)$ z) $\ln(0)$

1.2.3 Sachant que $\log(2) = 0.3010$ et $\log(3) = 0.4771$, calculer sans la calculatrice :

a) $\log(6)$ b) $\log(16)$ c) $\log(\sqrt{2})$ d) $\log(0,5)$ e) $\log(36)$ f) $\log\left(\frac{8}{27}\right)$

1.2.4 Simplifier les expressions ci-dessous sans utiliser la machine :

a) $\log(16) + 2\log(3) - 2\log(2) - \frac{1}{2}\log(9)$ b) $\log(15) + 3\log(10) - \log(30) - \log(5)$

c) $4\log(5) + \log\left(\frac{1}{5}\right) - 3\log(3) + \frac{1}{3}\log(27)$ d) $\dfrac{\log(20) + \log(100) - \log(2)}{\log(5'000) - \log(5) + \log(0,1)}$

1.2.5 Résoudre les équations ci-dessous :

a) $x = \log_2(32)$ b) $2^x = 100$ c) $\log_x(256) = 4$ d) $\log_2(x) = 4$

e) $10^x = 5$ f) $e^{2x-1} = 27$ g) $\log_x(1'000) = 3$ h) $12^x = -49$

1.2.6 Résoudre les équations ci-dessous :

a) $\log_{11}(x+1) = \log_{11}(7)$ b) $\log_6(2x-3) = \log_6(12) - \log_6(3)$

c) $\log(x) - \log(x+1) = 3\log(4)$ d) $2\log_3(x) = 3\log_3(5)$

e) $\ln(x) + \ln(x-2) = 0,5\ln(9)$ f) $\log_8(x+4) = 1 - \log_8(x-3)$

1.2.7 Résoudre les systèmes d'équations :

a) $\begin{cases} \log(x) + \log(y) &= 2 \\ x + y &= 25 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log(x) - \log(y) &= 1 \\ x\,y &= 2 \end{cases}$

1.2.8 Estimer graphiquement les solutions des équations suivantes :

a) $3^x = \dfrac{3}{2}(x+1)$

b) $x + \log_3(x) = 0$

1.2.9 Esquisser le graphe des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x \cdot 2^x$

b) $f(x) = \dfrac{2^x}{x}$

c) $f(x) = 2^{2/x}$

d) $f(x) = 2^{-x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{2^x - 1}$

f) $f(x) = x + 1.1^x$

g) $f(x) = x\,\log_2(x)$

h) $f(x) = \log_2(-x)$

i) $f(x) = \dfrac{1}{\log(x)}$

j) $f(x) = \log_2(x^2)$

1.2.10 Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{2}{10^x - 9}$

b) $f(x) = \log_7\left(\dfrac{x^2-1}{x+3}\right)$

c) $f(x) = \log(x^3 + 2\,x^2 - 3)$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\log(x^2-1)}$

1.2.11 Etablir le tableau des signes des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \log(-x^2 + 4\,x + 22)$

b) $f(x) = 12 - 10^{3-x}$

c) $f(x) = \log_2\left(\dfrac{2\,x}{x-1}\right)$

1.2.12 Une étude a montré que l'indice de satisfaction (sur une échelle de 1 à 10) des clients abonnés à un service Internet était donné par la fonction s définie par

$$s(t) = \frac{20\ln(t+1) + t}{t+1} \qquad t \geq 1$$

où t représente le nombre de mois écoulés depuis le début de l'abonnement (cette fonction n'est valable qu'à partir de la fin du 1er mois).

a) Quel est l'indice de satisfaction après 5 mois d'abonnement (réponse à deux décimales) ?

b) Si l'abonnement est conclu le 1er janvier, au cours de quel mois l'indice de satisfaction est-il maximal ?

c) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} s(t)$.

1.2.13 Dans une école, une étude a montré que le degré d'intérêt (sur une échelle de 1 à 10) des élèves au cours d'une leçon de 45 minutes est donné par la fonction d définie par

$$d(t) = \frac{t \cdot e^{-\frac{t}{30}} + 2}{2}$$

où t représente le nombre de minutes écoulées depuis le début de la leçon.

a) Quel est le degré de motivation des élèves en entrant en classe ?

b) Quel est le degré de motivation des élèves après 20 minutes en classe ?

c) Après combien de minutes le degré maximal est-il atteint ? Donner sa valeur maximale.

1.2.14 Le modèle de Jenss est généralement considéré comme la formule la plus précise pour prévoir la taille d'un enfant en âge préscolaire. Si y est sa taille en cm et x son âge en années, on a $y = 79,041 + 6,39x - e^{3,261-0,993x}$. Quelle est, d'après ce modèle, la taille d'un enfant d'une année ?

1.2.15 La relation d'Ehrenberg $\ln(m) = \ln(2,4) + 1,84h$ est une formule empirique liant la taille h (en mètres) à la masse moyenne m (en kilogrammes) d'enfants âgés de 5 à 13 ans.

a) Évaluer, à l'aide de cette formule, la taille moyenne d'un enfant de 7 ans qui pèse $21,8$ kg.

b) Évaluer, à l'aide de cette formule, la masse moyenne d'un enfant de 8 ans qui mesure $1,5$ m.

1.2.16 Dans l'étude de 15 villes ayant une population P allant de 300 à 3'000'000 d'habitants, on a déterminé que la vitesse moyenne v (en m/s) d'un piéton pouvait être donnée approximativement par $v = 0,0151 + 0,258\log(P)$.

a) Selon ce modèle, quel est la vitesse moyenne d'un piéton à Lausanne ($\sim$ 130'000 habitants) ?

b) Évaluer, à l'aide de cette formule, le nombre d'habitants nécessaire pour que la vitesse moyenne d'un piéton soit de $1,5$ m/s.

1.2.17 La masse m (en kilogrammes) d'une éléphante d'Afrique à l'âge de t (années) peut être donnée approximativement par $m = 2'600(1 - 0,51e^{-0,057t})^3$.

a) Donner approximativement sa masse à la naissance.

b) Évaluer l'âge d'une éléphante d'Afrique ayant une masse de $1,8$ tonnes.

1.2.18 Un pêcheur esquimau tombe dans l'eau dont la température est de 0°C . La relation $T = 37e^{-0,02\,t}$ donne la température T de son corps après t minutes.

a) Quelle sera la température de son corps après 45 minutes.

b) Calculer le temps dont disposent ses amis pour le secourir si l'on sait qu'il s'évanouira lorsque son corps sera à une température de 25°C.

1.2.19 La population d'une culture bactérienne double toutes les 12 heures. Supposons que la population initiale est de 10'000 bactéries.

a) Déterminer la relation qui représente la taille de la population N après t heures.

b) Combien y aura-t-il de bactéries après une semaine ?

c) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura-t-il triplé ?

1.2.20 Un étang contient 1'000 truites. Trois mois plus tard, il n'en reste que 600.

a) A l'aide d'un modèle exponentiel, trouver une formule permettant d'estimer le nombre N de truites restantes après t mois.

b) Combien y aura-t-il de truites dans l'étang après une année ?

c) Après combien de temps y en aura-t-il plus que 80 ?

1.2.21 Un médicament est éliminé du corps par l'urine. Un patient en avale une dose de 10 mg. Une heure plus tard, des mesures montrent qu'il ne reste plus que 8 mg de ce médicament dans son corps.

a) A l'aide d'un modèle exponentiel, trouver une formule permettant d'estimer la quantité Q de médicament encore présente dans le corps du patient après t heures.

b) Donner approximativement la quantité du médicament dans le corps du patient 8 h après l'absorption.

c) Après combien de temps, le patient n'aura plus que 1 mg de ce médicament dans son corps ?

1.2.22 On place un capital C à un taux d'intérêt annuel i pendant une durée de n années et on obtient le montant C_n. Remplir le tableau ci-dessous :

C	i	n	C_n
$4'720.-$	$3,5\%$	12 ans	
	$3,5\%$	24 ans	$5'388.65$
$9'440.-$	$3,5\%$		$11'604.17$
$790.-$		72 ans	$9'404.43$

1.2.23 En 1867, les USA ont acheté l'Alaska à la Russie pour la somme de \$ $7'200'000$. En supposant que la valeur du terrain augmente régulièrement de 3% par an, quelle aurait été sa valeur en l'an 2'000 ?

1.2.24 CHF 10'000.- sont déposés sur un compte d'épargne à un taux d'intérêts composés de 11% par an. Combien faudra-t-il d'années au minimum pour que la somme double ?

1.2.25 Le taux de dépréciation annuel d'une voiture de valeur initiale CHF 18'000.- est de 25%.

a) Trouver la valeur v de cette voiture après t années.
b) Calculer la valeur de la voiture après 8 ans.
c) Calculer la valeur de la voiture lorsque t devient très grand.

1.2.26 Nous avons au départ 50mg de l'isotope Po^{210}. Après 30 jours, il n'en reste plus que 43mg.

a) Déterminer la quantité de matière restante Q après t jours.
b) Combien restera-t-il de matière après 3 semaines.
c) Quelle est la demi-vie de cet isotope.

1.2.27 Le césium est une matière radioactive dont la demi-vie est égale à environ 30 ans. On dispose de 100 tonnes de cette substance.

a) Déterminer la quantité de substance restante Q après t années.
b) Combien restera-t-il de cette substance après 5 ans.

1.2.28 Les grottes de Lascaux ont été découvertes en 1940. Des analyses ont montré que le charbon trouvé dans ces grottes avait perdu le 83% de la quantité de C^{14} présent dans les plantes vivantes. Déterminer l'âge des peintures de Lascaux.

1.2.29 La taille d'un arbre est souvent décrite par un modèle logistique. Supposons que la hauteur h (en mètres) d'un arbre de t années est donnée par la relation

$$h = \frac{40}{1 + 200\, e^{-0,2t}}$$

a) Quelle est la hauteur d'un arbre vieux de 30 ans ?

b) A quel âge l'arbre aura-t-il une hauteur de 16m ?

c) Quelle hauteur maximale l'arbre peut-il atteindre ?

1.2.30 La grippe se propage à partir d'un individu malade dans une population de 1'000 personnes. On admet que le nombre de personnes qui sont ou ont été atteintes par la grippe après t jours est $N = \dfrac{1'000}{1 + 999 \cdot 10^{-0,17t}}$.

a) Combien de personnes ont-elles été atteintes après 20 jours ?

b) Après combien de jours 600 personnes ont-elles été atteintes ?

c) Quel est le maximum de personnes qui peuvent être atteintes par la grippe ?

1.2.31 En 1980, la population des USA était d'environ 227'000'000 habitants et en 1990 d'environ 248'710'000 habitants. Des sociologues prédisent que la population des USA se rapprochera de 500 millions, mais ne dépassera jamais cette valeur.

a) A l'aide du modèle logistique, donner la population N des USA t années après 1980.

b) Quelle fut la population de ce pays en l'an 2000 ?

1.2.32 Les démographes utilisent principalement quatre modèles de croissance de la population mondiale. Pour chacun d'eux, la population initiale est de 4 milliards en 1976 ($t = 0$) et le taux relatif de croissance instantanée de 2% par année :

- croissance illimitée : $P_1 = 4e^{0,02t}$ (en milliards)
- croissance limitée : $P_2 = 20 - 16e^{-0,005t}$ (en milliards)
- modèle de Verhulst : $P_3 = \dfrac{20}{1 + 4e^{-0,025t}}$(en milliards)
- modèle de Gompertz : $P_4 = 20(0,2)^{0,9877^t}$ (en milliards)

Pour chacun des modèles,

a) calculer la croissance de la population mondiale lorsque $t = 0$, $t = 1$ et $t = 10$.

b) au bout de combien d'années la population mondiale atteindra 5 milliards d'individus ?

c) calculer la croissance de la population mondiale lorsque t devient très grand.

d) tracer la courbe représentative de chacun des modèles pour $t \geq 0$ et comparer les prédictions de ces quatre modèles.

1.2.33 Un séisme a été enregistré par un sismographe à 220 km de son épicentre. Calculer son amplitude si sa magnitude était de 5 sur l'échelle de Richter.

1.2.34 L'intensité d'un faisceau de rayons X ayant traversé x cm de matière est donnée par la règle de correspondance $I(x) = I_0\, e^{-k\,x}$ où k est une constante linéaire d'absorption qui dépend de la matière.

a) Trouver la valeur de la constante linéaire d'absorption k, si une épaisseur de 8 cm de matière absorbe la moitié du faisceau. En déduire le modèle associé à cette situation particulière.

b) Trouver l'intensité du faisceau qui a traversé 16 cm de cette matière.

c) Esquisser le graphique de cette fonction.

1.2.35 Le radium A se désintègre à une vitesse telle qu'à la fin de chaque minute il ne reste que les $8/10$ de la quantité initiale.

a) Etablir le modèle décrivant la quantité de radium en fonction du temps t mesuré en minutes.

b) Esquisser le graphique de cette fonction.

c) Trouver la demi-vie du radium A.

1.3 Solutions des exercices

1.1.1 a) 6^4 ; b) $(-24)^3$; c) 15^6 ; d) 5^{55} ; e) 15^5 ; f) 5^2 ; g) $\dfrac{1}{5^2}$; h) $-\dfrac{2^5}{3^5}$; i) 1.

1.1.2 a) 2^6 ; b) 2^8 ; c) 2^{16} ; d) $\dfrac{1}{3^{18}}$; e) $\dfrac{2^8}{3^6}$; f) $\dfrac{2^3}{5^3}$; g) 2^{15} ; h) $\dfrac{2^4}{3^4}$; i) 1.

1.1.3 a) $\dfrac{1}{16}$; b) $\dfrac{1}{2}$; c) $\dfrac{1}{27}$; d) 4 ; e) 4 ; f) $\dfrac{27}{8}$.

1.1.4

2^{11}	2^{-2}	2^{-3}	2^8
2^0	2^6	2^5	2^3
2^4	2	2^2	2^7
2^{-1}	2^9	2^{10}	2^{-4}

1.1.5 a) 2^3 ; b) 2^{-15} ; c) 5^5 ; d) 1 ; e) 10 ; f) 11^{50} ; g) 7^{-8} ; h) 10^{-2} ; i) 10^8.

1.1.6 a) $3^4x^6y^2z^8$; b) $2^4a^8b^{12}c^4$; c) 2^2r^3s ; d) 2^7y^{24} ; e) u^6v^{-9} ; f) $2x^4y^{-7}$; g) $3^{-4}x$; h) y^{-65}.

1.1.7 a) 5 ; b) 10 ; c) 5 ; d) 2 ; e) 3 ; f) $0,3$; g) $0,5$; h) $0,25$; i) 0 ; j) 0,02.

1.1.8 a) $2\sqrt{6}$; b) $3\sqrt{2}$; c) $9\sqrt{3}$; d) $5\sqrt{2}$; e) $10\sqrt{3}$; f) $3\sqrt{6}$; g) $5\sqrt{5}$; h) $7\sqrt{3}$; i) $4\sqrt{5}$; j) $10\sqrt{10}$; k) $5\sqrt{10}$; l) $10\sqrt{70}$; m) $-2\sqrt{5}$; n) $13\sqrt{10}$.

1.1.9 a) $147\sqrt{3}+78$; b) $-14\sqrt{15}-57$; c) 1 ; d) $16\sqrt{3}+28$.

1.1.10 a) $\sqrt[6]{7}$; b) $120'000$; c) 4 ; d) 27 ; e) 4 ; f) $\sqrt[4]{27}$; g) $\sqrt[12]{78'125}$; h) $\sqrt[3]{4}$; i) 3 ; j) 2 .

1.1.11 a) a ; b) a ; c) a^3 ; d) $\sqrt[12]{a^{25}}$; e) $\sqrt{a^3}$; f) $\sqrt[4]{a^5}$; g) $\sqrt[6]{a}$; h) $\sqrt[10]{a^3}$; i) $\sqrt[6]{a^5}$; j) $\sqrt[12]{a}$; k) $\sqrt[12]{a}$; l) $\sqrt[6]{a^7}$.

1.1.12 a) $\sqrt{2}/2$; b) $\dfrac{2\sqrt[4]{125}}{5}$; c) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; d) $2-\sqrt{3}$; e) $\sqrt{5}-\sqrt{3}$; f) $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}$.

1.1.13 a) $5^{2/3}$; b) $7^{1/10}$; c) $-7^{1/4}$; d) $2^{1/2}$; e) $3^{-1/2}$; f) $2^{15/7}$; g) $5^{1/4}$; h) 3.

1.1.14 a) $\sqrt{7^3}$; b) $\sqrt[5]{3^2}$; c) $\sqrt{64^3}$; d) $-\sqrt[4]{11}$; e) $\dfrac{1}{\sqrt{36}}$; f) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{8^7}}$; g) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{27}}$; h) -.

1.1.15 a) 8 ; b) 3 ; c) 500 ; d) 1000 ; e) 16 ; f) -2 ; g) -2 ; h) $\frac{1}{2}$.

1.1.16 a) -85 ; b) -482 ; c) 6 ; d) 1.

1.1.17 a) 1 si $u \neq 0$; b) $a^2b^{5/6}c^{-5}$; c) $x^{-277/90}y^{13/12}$.

1.2.1 a) $S=\{1\}$; b) $S=\{2\}$; c) $S=\{-1;3\}$; d) $S=\{-\dfrac{1}{2};2\}$; e) $S=\{-\dfrac{4}{99}\}$; f) $S=\{7\}$; g) $S=\{3\}$; h) $S=\emptyset$; i) $S=\{-8\}$; j) $S=\{\dfrac{3}{2}\}$; k) $S=\{\dfrac{1}{2};1\}$; l) $S=\{3\}$.

1.2.2 a) 0 ; b) 3 ; c) 6 ; d) 10 ; e) 1 ; f) $1/2$; g) -1 ; h) 3 ; i) 3 ; j) $1/4$; k) -2 ; l) -2 ; m) $3/4$; n) 2 ; o) 1 ; p) 3 ; q) 4 ; r) 1 ; s) -3 ; t) $1/4$; u) 2 ; v) 2 ; w) 0 ; x) non défini ; y) -4 ; z) non défini.

1.2.3 a) $0,7781$; b) $1,204$; c) $0,1505$; d) $-0,3010$; e) $1,5562$; f) $-0,5283$.

1.2.4 a) $2\log(2)+\log(3)$; b) 2 ; c) $3\log(5)-2\log(3)$; d) $\frac{3}{2}$.

1.2.5 a) $S=\{5\}$; b) $S=\{\log_2(100)\}$; c) $S=\{4\}$; d) $S=\{16\}$; e) $S=\{\log_{10}(5)\}$; f) $S=\{\frac{\ln(27)+1}{2}\}$; g) $S=\{10\}$; h) $S=\emptyset$.

1.2.6 a) $S=\{6\}$; b) $S=\{\frac{7}{2}\}$; c) $S=\emptyset$; d) $S=\{11,18\}$; e) $S=\{3\}$; f) $S=\{4\}$.

1.2.7

a) $(x;y)=(20;5);(x;y)=(5;20)$

b) $(x;y)=(2\sqrt{5};1/\sqrt{5})$

1.2.8

a) 1 ; -0.7 environ

b) 0.5 environ

1.2.9 –

1.2.10 –

1.2.11 –

1.2.12 –

1.2.13 –

1.2.14 Selon ce modèle, la taille d'un enfant d'une année est d'environ $75,77$ cm.

1.2.15 a) Il mesure environ $1,2$ m ; b) il pèse environ $37,9$ kg.

1.2.16 a) La vitesse moyenne est de $1,3$ m/s ; b) la population doit être d'environ $569'411$ habitants.

1.2.17 a) A la naissance, elle pèse environ 305.9 kg ; b) 26 ans.

1.2.18 a) Elle sera de 15.043 C ; b) il faut le secourir avant environ 19.6 min.

1.2.19 a) $N=10'000\cdot 2^{t/12}$; b) après une semaine, il y aura $1,6384\cdot 10^8$ bactéries ; c) le nombre de bactéries aura triplé après environ 19 h.

1.2.20 a) $Q=1'000\cdot 0,6^{t/3}$; b) après une année, il y aura environ 129 truites ; c) il n'y aura plus que 80 truites après environ 14,8 mois.

1.2.21 a) $N = 10 \cdot 0,8^t$; b) après 8h, il reste environ 1.68 mg de médicament dans le corps ;
c) il faut attendre 10h, 19min et 8s pour qu'il ne reste plus que 1 mg de médicament dans le corps du patient.

1.2.22

C	i	n	C_n
$4'720.-$	$3,5\%$	12 ans	$7'132.25$
$2'360.-$	$3,5\%$	24 ans	$5'388.65$
$9'440.-$	$3,5\%$	6 ans	$11'604.17$
$790.-$	$3,5\%$	72 ans	$9'404.43$

1.2.23 Le capital aurait valu environ $367'014'635$\$.

1.2.24 7 ans.

1.2.25 a) $v = 18'000(1-25\%)^t$; b) après 8 ans, la voiture ne vaut plus que CHF $1'802.-$; c) lorsque t est grand, la voiture ne vaut plus rien.

1.2.26 a) $Q = 50 \cdot e^{-0.0050274 \cdot t}$; b) après trois semaines, il ne restera plus qu'environ 45 mg de matière ; c) la demi-vie est d'environ de 138 jours.

1.2.27 a) $Q = 100 \cdot e^{-0.023105 \cdot t}$; b) après 5 ans il restera 89 tonnes de substance.

1.2.28 Les grottes de Lascaux datent d'environ 12'708 av. J.C.

1.2.29 a) Un arbre de 30 ans mesure environ 26.74 m ; b) après 24 ans et demi, l'arbre mesurera 16 m ; c) la hauteur maximale qu'un arbre peut atteindre est de 40 m.

1.2.30 a) Après 20 jours, environ 715 personnes seront atteintes ; b) 600 personnes seront atteintes après environ 19 jours ; c) lorsque t sera très grand, l'entier de la population, à savoir $1'000$ personnes, seront atteintes.

1.2.31 a) $N = \dfrac{1.135 \cdot 10^{17}}{2.27 \cdot 10^8 + 2.73 \cdot 10^8 \cdot e^{-0.017t}}$; b) selon ce modèle, la population américaine en l'an 2000 valait environ 270'439'855 habitants.

1.2.32 a) $P_1(0) = 4$, $P_1(1) \cong 4.08$, $P_1(10) \cong 4.89$, $P_2(0) = 4$, $P_2(1) \cong 4.08$, $P_2(10) \cong 4.78$, $P_3(0) = 4$, $P_3(1) \cong 4.08$, $P_3(10) \cong 4.86$, $P_4(0) = 4$, $P_4(1) \cong 4.08$, $P_4(10) \cong 4.82$;
b) P_1 : 11 ans, P_2 : 13 ans, P_3 : 11 ans et demi, P_4 : 12 ans ; c) P_1 tend vers l'infini, P_2 tend vers 20, P_3 tend vers 20, P_4 tend vers 20 ; d) -.

1.2.33 L'amplitude est d'environ 25 μm.

1.2.34 a) $k = \frac{\ln(0.5}{-8} = 0.08664$. b) $I(16) = 0,250001\, I_0$

1.2.35 a) $Q(t) = Q_0\, 0.8^t$ b) - c) 3.11 minutes