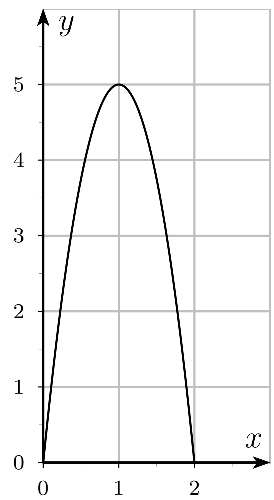
Chapitre 2

Analyse

2.1 Lecture et interprétation de graphes

2.1.1 On a tracé ci-dessous le graphe d'une fonction f.



a) Déterminer graphiquement les zéros de f.

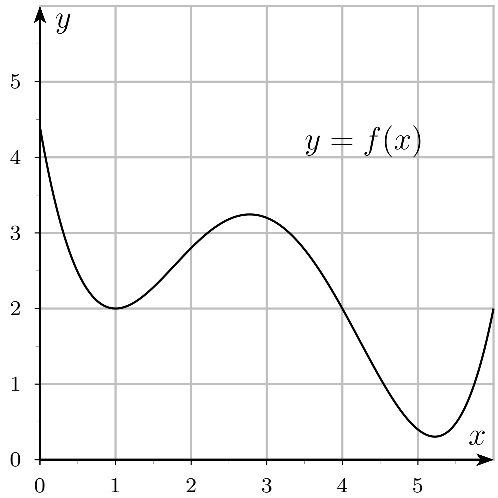
b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 4$.

c) Donner les coordonnées du maximum de f.

On suppose maintenant que $f(x)$ représente la hauteur (en mètres) d'une balle lancée verticalement depuis le sol, en fonction du nombre de secondes x écoulées depuis son lancer.

Interpréter par une phrase les trois réponses précédentes.

2.1.2 Une fonction f est donnée par le graphe ci-dessous.



Estimer en observant le graphe,

a) la valeur de $f(0)$;

b) la valeur de $f(3)$;

c) les valeurs de x sachant que $f(x) = 2$;

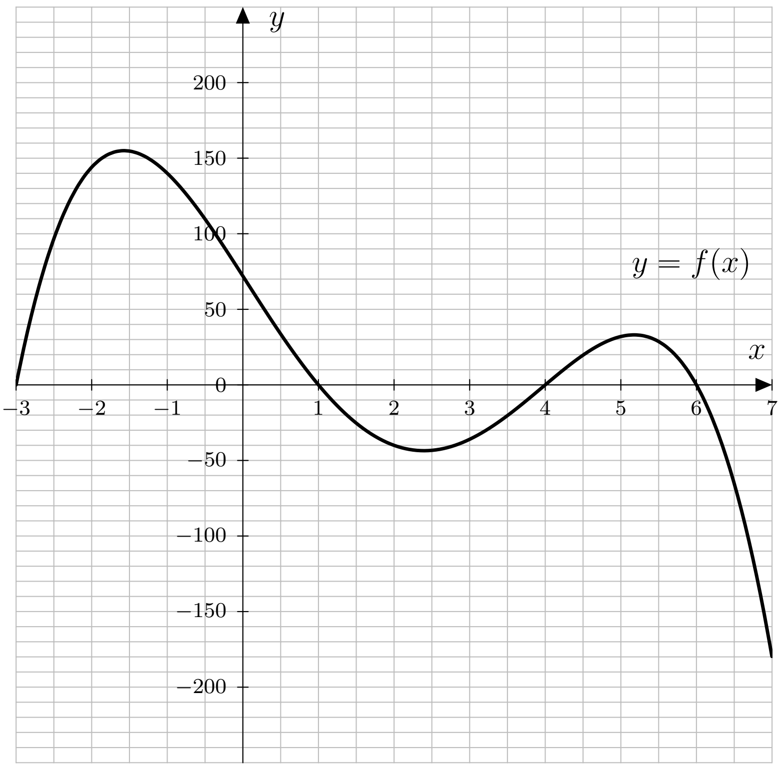
d) les coordonnées du minimum de f ;

e) l'abscisse du maximum de f pour des valeurs de x comprises entre 0 et 6.

On suppose maintenant que $f(x)$ représente l'intensité des précipitations (en millimètres par heure) durant l'après-midi du 17 mars 2009, en fonction du temps x, où x représente le temps (en heures) écoulé depuis midi.

Interpréter par une phrase chaque réponse donnée aux questions précédentes.

2.1.3 On a tracé ci-dessous le graphe d'une fonction f.



Déterminer graphiquement :

a) l'ordonnée à l'origine de f ;

b) la valeur de $f(2)$;

c) les solutions de l'équation $f(x) = 0$;

d) la valeur de x pour laquelle la fonction f est maximale ;

e) la valeur la plus basse que prend la fonction f.

On suppose maintenant que $f(x)$ représente le bénéfice (en milliers de francs) d'une entreprise en fonction du temps x (en années) écoulé depuis le début de l'année 2010.

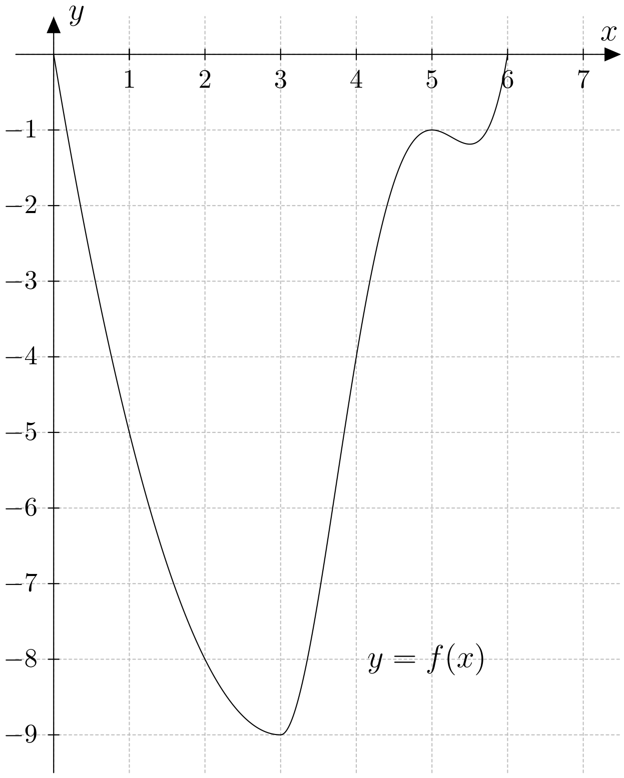
f) Interpréter les valeurs trouvées ci-dessus par des phrases.

g) Quelles sont les années durant lesquelles l'entreprise a été déficitaire ?

h) Si l'entreprise a été créée en 2007, a-t-elle été rentable la première année ?

i) Durant l'année 2013, le bénéfice de l'entreprise était-il en croissance ou en décroissance ?

2.1.4 Une fonction f est donnée par le graphe ci-dessous.



Estimer à l'aide du graphe :

a) la valeur de $f(1)$;

b) les coordonnées du minimum de f ;

c) les solutions de l'équation $f(x) = -7$.

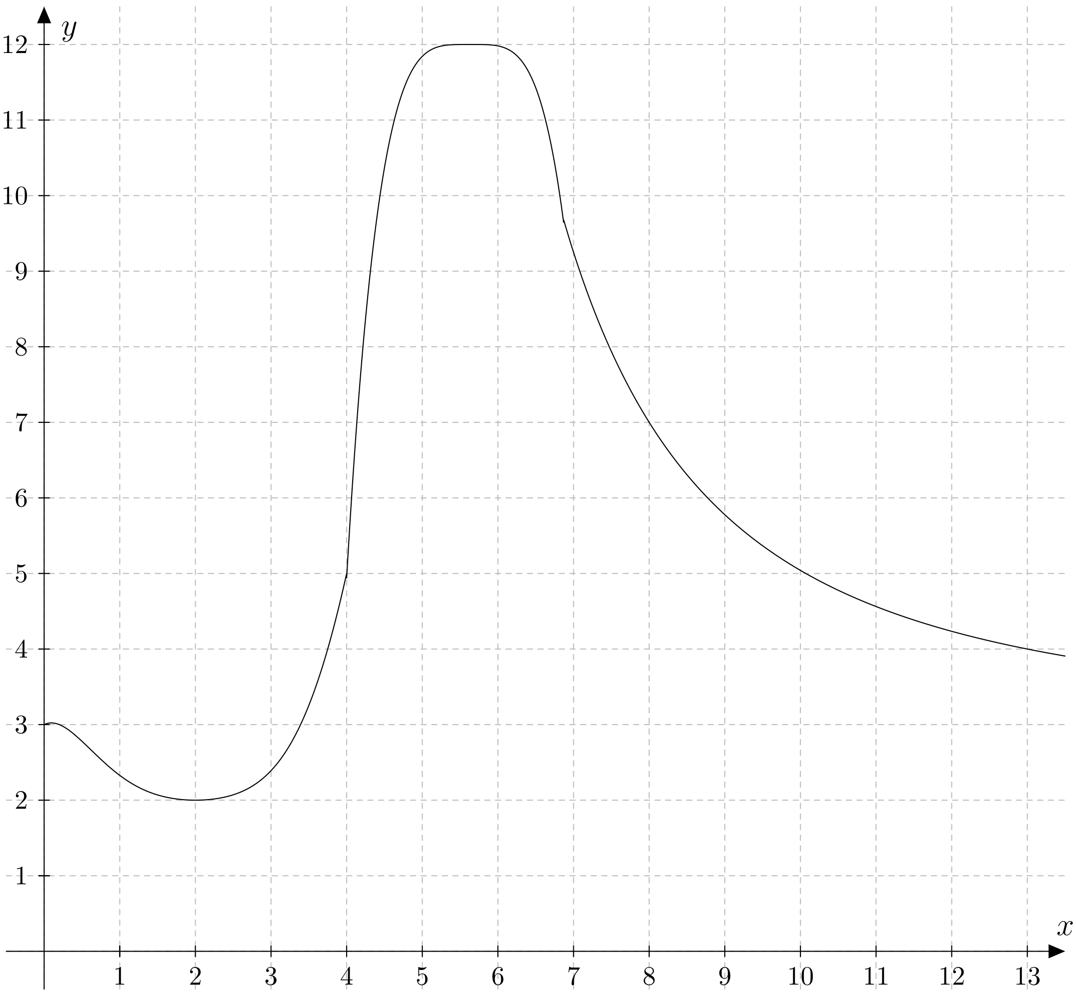
On suppose maintenant que $f(x)$ représente l'altitude (en mètres, par rapport au niveau de la mer) atteinte par un plongeur en fonction du temps x (en secondes).

d) Interpréter les valeurs trouvées ci-dessus par une phrase.

e) Après combien de temps est-il remonté à la surface ?

f) Est-il remonté directement à la surface ?

2.1.5 On a tracé ci-dessous le graphe d'une fonction f.



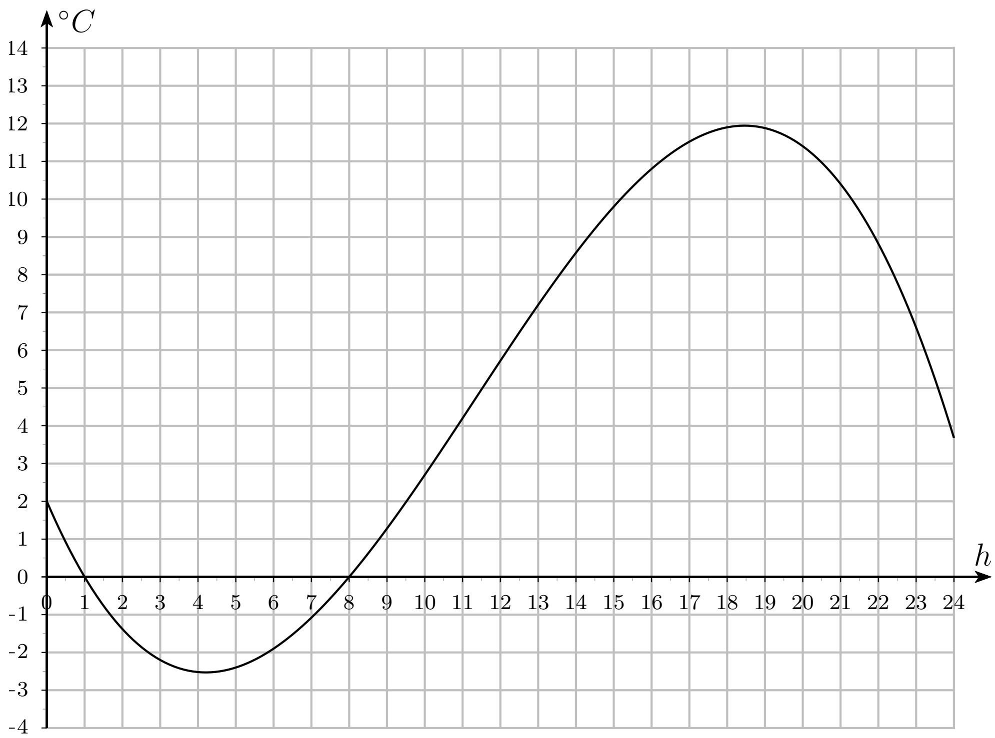
Déterminer graphiquement :

a) l'ordonnée à l'origine ;
b) la valeur maximale de $f(x)$;
c) les coordonnées du minimum de la fonction ;
d) les solutions de l'équation $f(x) = 5$.

On suppose maintenant que $f(x)$ représente la force du vent (sur l'échelle de Beaufort) d'un typhon en fonction de la distance x (en dizaine de mètres) du centre du typhon.

Interpréter les valeurs trouvées ci-dessus par une phrase.

2.1.6 Le graphe ci-dessous représente la température en degrés Celsius dans une ville lors d'une journée d'un mois d'automne.



a) A quel(s) moment(s) durant cette journée la température a-t-elle été de zéro degré ?

b) Quelle a été la température maximale atteinte cette journée-là ?

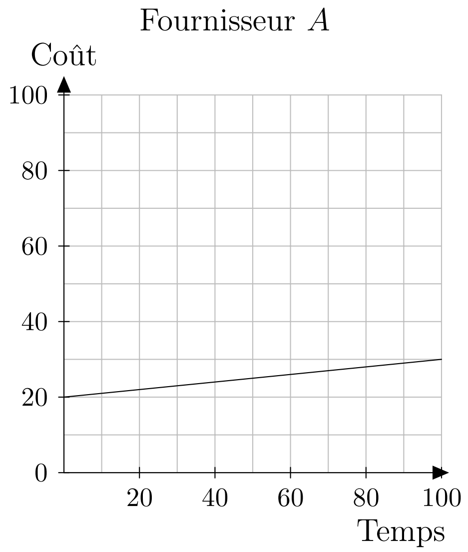
c) On considère généralement que les routes deviennent glissantes lorsque la température est inférieure à 3 degrés. Selon cette information, pendant quel intervalle de temps les routes de cette ville ont-elles été considérées comme glissantes ?

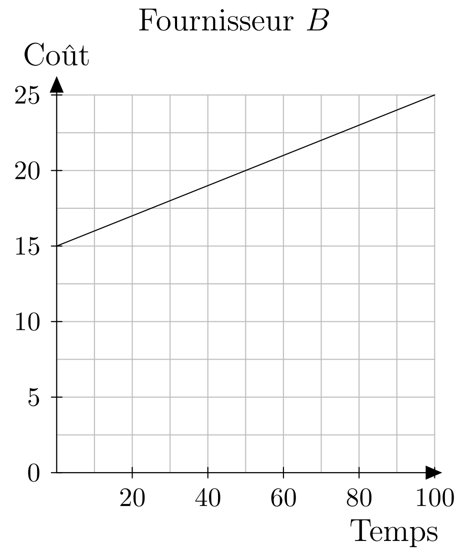
d) A partir de quelle heure la température a-t-elle commencé à augmenter ?
Et jusqu'à quelle heure ?

2.1.7 a) Les deux graphiques ci-dessous représentent le prix (en francs) d'un abonnement de téléphone mobile en fonction du temps (en minutes) de communication par mois, chez deux fournisseurs différents.

Chez quel fournisseur le prix de base de l'abonnement est-il le moins cher ?

Et chez quel fournisseur la minute de communication est-elle la moins chère ?

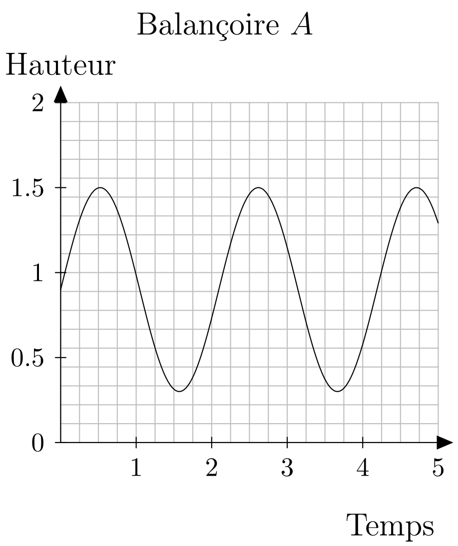


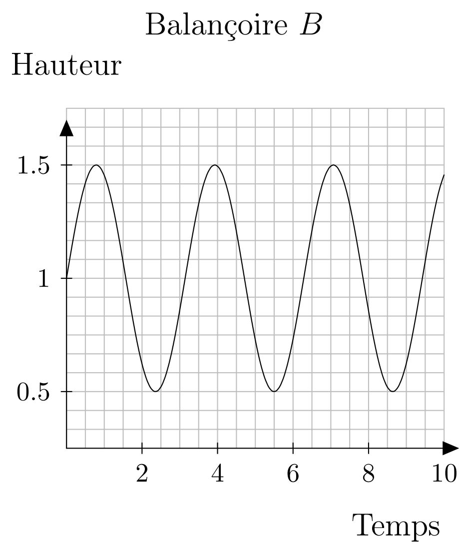


b) Les deux graphiques ci-dessous représentent la hauteur d'un enfant (en mètres) sur une balançoire en fonction du temps (en secondes).

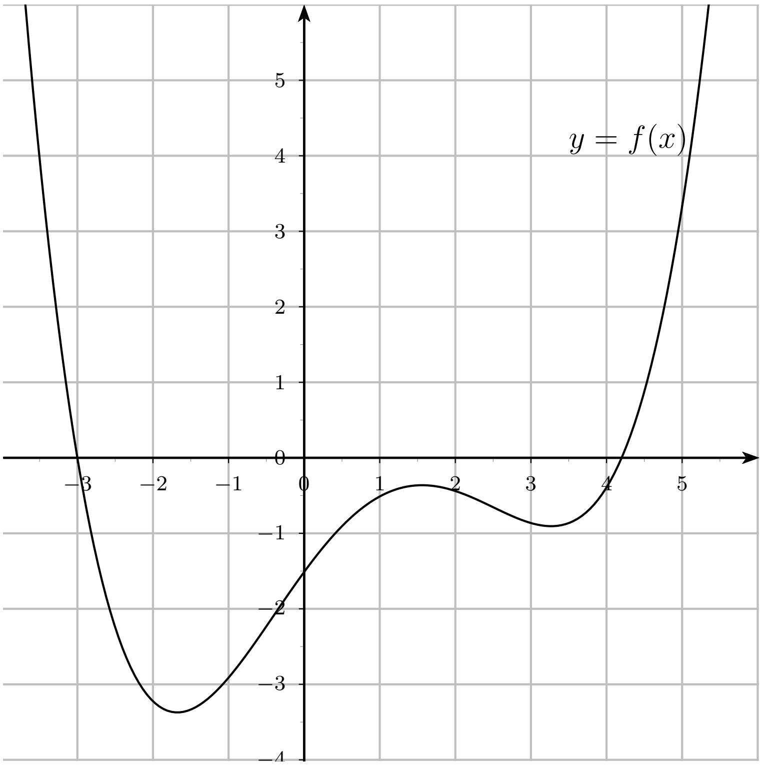
Sur quelle balançoire l'enfant va-t-il le plus haut ?

Sur quelle balançoire l'enfant fait-il le plus d'aller-retours par minute ?





2.1.8 La fonction f est donnée par le graphe ci-dessous.



Estimer en observant le graphe,

a) la valeur de $f(0)$;

b) la valeur de $f(-2)$;

c) les valeurs de x sachant que $f(x) = 0$;

d) les valeurs de x sachant que $f(x) = 2$;

e) les valeurs de a sachant que l'équation $f(x) = a$ ne possède qu'une seule solution. Quelle est alors cette solution ?

f) les valeurs de x sachant que $f(x) = x$;

g) les valeurs de x sachant que $f(x) = -x$;

2.2 Généralités sur les fonctions

2.2.1 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4 - 5x$

b) $f(x) = x^2 - x - 2$

c) $f(x) = (x+4)^2(2+x)$

d) $f(x) = -6x^3 + 11x^2 - 3x$

e) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

f) $f(x) = x^4 + 5x^2 - 36$

2.2.2 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{x(x+4)}{3-2x}$

b) $f(x) = \dfrac{2x}{16-x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{(x+2)^2(x+1)}{x^2+x}$

d) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x-5} + \dfrac{3}{x+1}$

f) $f(x) = \dfrac{-5(4-x)^2}{(1-x^2)(2-x)}$

2.2.3 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

b) $f(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x-5}$

c) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-5)}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{6-2x}}{x^2-5x+4}$

e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-4}}$

f) $f(x) = \dfrac{x^2+7x}{\sqrt{1-x^2}}$

2.2.4 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$g(x) = \sqrt{x^4 - 12\,x^3 + 34\,x^2 + 12\,x - 35}$$

2.2.5 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(7-2x)$

b) $f(x) = e^{x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{3-x}{1-\log(x)}$

d) $f(x) = 3^{1/(x+2)}$

e) $f(x) = \log_2\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)$

f) $f(x) = 10^{-x}$

2.2.6 Calculer dans chaque cas la valeur de $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\cdot g)(x)$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$.
Donner ensuite les ensembles de définition des fonctions $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ et $\dfrac{f}{g}$.

a) $f(x)=3$ et $g(x)=x^2$

b) $f(x)=\dfrac{2x}{x-4}$ et $g(x)=\dfrac{x}{x+5}$

c) $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=\sqrt{4x}$

d) $f(x)=\ln(x)$ et $g(x)=\ln(1-x)$

2.2.7 Soit f, g et h trois fonctions définies par $f(x)=2x$, $g(x)=2x-1$ et $h(x)=x^2$. Calculer :

a) $(f\circ g)(x)$

b) $(h\circ f)(x)$

c) $(g\circ h\circ f)(x)$

2.2.8 Dans chacun des cas suivants, donner $(f\circ g)(x)$, $D_{f\circ g}$, $(g\circ f)(x)$, $D_{g\circ f}$.

a) $f(x)=x^2-3x$ et $g(x)=\sqrt{x+2}$

b) $f(x)=\dfrac{x}{3x+2}$ et $g(x)=\dfrac{2}{x}$

2.2.9 Les fonctions f suivantes sont des fonctions composées. Donner une décomposition possible de f en deux fonctions : $f=g\circ h$.

a) $f(x)=\sqrt{3x+1}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x+3}$

c) $f(x)=(x+2)^7$

d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-4}$

e) $f(x)=\log(x^2+4)$

f) $f(x)=3^{2x-5}$

2.2.10 Tracer le graphe des fonctions suivantes :

a) $f(x)=2$

b) $f(x)=\dfrac{2}{5}x$

c) $f(x)=x+4$

d) $f(x)=3x-6$

e) $f(x)=-2x+3$

f) $f(x)=x^2+x-2$

g) $f(x)=4-x^2$

h) $f(x)=x^2-2x+3$

i) $f(x)=-2x^2-7x+4$

j) $f(x)=x^2+4x+4$

2.2.11 Tracer dans le même système d'axes les graphes des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x\ ,\ f_2(x) = x^2\ ,\ f_3(x) = x^3\ ,\ f_4(x) = x^4\ ,\ f_5(x) = x^5$$

2.2.12 Esquisser le graphe des fonctions données par :

a) $f(x) = 3^x$ et $g(x) = \log_3(x)$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ et $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$

c) $f(x) = e^x$ et $g(x) = \ln(x)$

d) $f(x) = 10^{-x}$ et $g(x) = \log_{0,1}(x)$

2.2.13 Esquisser le graphe des fonctions données par :

a) $f(x) = E(2x)$

b) $f(x) = E\left(\frac{x}{3}\right)$

c) $f(x) = x \cdot E(x)$

d) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^3 - 4x)$

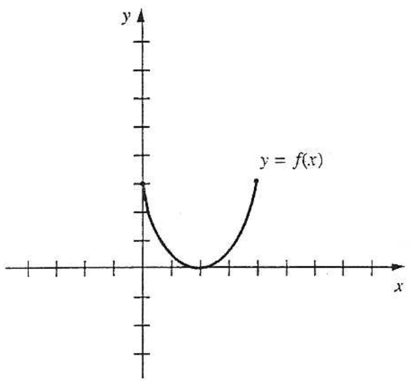
e) $f(x) = (\operatorname{sgn}(x))^2$

f) $f(x) = x \cdot |x|$

g) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

h) $f(x) = \sqrt{|x|}$

2.2.14 Dans le système d'axes ci-dessous, esquisser les courbes :



a) $y = f(x+3)$

b) $y = f(x-3)$

c) $y = f(x) + 3$

d) $y = f(x) - 3$

e) $y = -3f(x)$

f) $y = -\frac{1}{3}f(x)$

g) $y = -f(x+2) - 3$

h) $y = f(x-2) + 3$

2.2.15 Tracer le graphe des fonctions suivantes :

a) $f(x) = |x| - 2$, $g(x) = |x| + 1$, $h(x) = |x-3|$, $k(x) = |x+1|$ et $l(x) = -|x| + 1$

b) $f(x) = \sqrt{x+4}$, $g(x) = 2\sqrt{x}$ et $h(x) = \sqrt{x-1} - 4$

c) $f(x) = \frac{1}{x} - 3$ et $g(x) = \frac{1}{x-2}$

d) $f(x) = 2^x - 2$, $g(x) = 2^{x+1}$ et $h(x) = -2^x$

e) $f(x) = \ln(x-1)$, $g(x) = 2\ln(x)$, $h(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ et $k(x) = |\ln(x)|$

f) $f(x) = 2 + \sin(x)$ et $g(x) = |\cos(x)|$

2.2.16 Tracer le graphe des fonctions suivantes :

a) $f(x) = |4 - x^2|$

b) $f(x) = ||x+4| - 2| + 1$

c) $f(x) = |x^2 - 2x| - 1$

d) $f(x) = |x-1| + |x+2|$

2.2.17 Représenter le graphe des fonctions définies par :

a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{, si } x \leq -1 \\ x^3 & \text{, si } -1 < x < 1 \\ -x+3 & \text{, si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{, si } x > 0 \\ 0 & \text{, si } x \leq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{, si } x \neq -1 \\ 3 & \text{, si } x = -1 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{, si } x < 0 \\ 3x & \text{, si } 0 \leq x < 1 \\ 3 & \text{, si } x \geq 1 \end{cases}$

2.2.18 Quelles valeurs doit-on attribuer à a et à b pour que le graphe de f puisse être tracé « sans lever le crayon » ?

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{, si } x < -5 \\ ax+b & \text{, si } -5 \leq x \leq -1 \\ x^2+1 & \text{, si } x > -1 \end{cases}$$

2.2.19 Déterminer si les fonctions suivantes sont paires, impaires ou ni l'un ni l'autre :

a) $f(x) = 9x^4 - 3x^2 + 2$

b) $f(x) = x^3 - 2x$

c) $f(x) = 5$

d) $f(x) = x^2 + 8x + 2$

e) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{2x}$

f) $f(x) = \dfrac{x^5 - x}{x^2 + 1}$

g) $f(x) = \dfrac{x}{x+2} + \dfrac{x}{x-2}$

h) $f(x) = x^6 + 3x^2 - \frac{1}{x}$

i) $f(x) = \sqrt{x}$

j) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

k) $f(x) = |x^3 - 3x| + 1$

l) $f(x) = \dfrac{x}{|x| - 1}$

m) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

n) $f(x) = \sin^2(x) \cdot \cos(x)$

2.2.20 Quelle est la parité des fonctions $f + g$, $f \cdot g$, $f \circ g$ et $g \circ f$ si :

a) f et g sont deux fonctions paires ?

b) f et g sont deux fonctions impaires ?

c) f est une fonction paire et g une fonction impaire ?

2.2.21 Calculer $f(x + h) - f(x)$ si :

a) $f(x) = x^2 + 2\,x - 16$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$

c) $f(x) = \sqrt{2\,x - 7}$

2.2.22 Soit $f(x) = 2\,x^2 + 8\,x$. Montrer que pour tout nombre réel a, $f(2\,a) = 2\,f(a) + 4\,a^2$.

2.3 Fonctions injectives, surjectives et bijectives

2.3.1 Déterminer les applications injectives, surjectives ou bijectives.

a) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & 2\,x+1 \end{array}$

e) $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x \end{array}$

i) $f_9 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,x+1 \end{array}$

b) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

f) $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x+2 \end{array}$

j) $f_{10} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$

c) $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x-3 \end{array}$

g) $f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

k) $f_{11} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - x^2 \end{array}$

d) $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$

h) $f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

l) $f_{12} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$

m) $f_{13} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ n) $f_{14} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array}$ o) $f_{15} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log(x) \end{array}$

2.3.2 Définir l'application réciproque des bijections.

a) $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$

b) $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3\,x \end{array}$

c) $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\,x+3 \end{array}$

d) $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$

e) $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$

f) $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & x-3 \end{array}$

g) $f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}-\{1\} & \to & \mathbb{R}-\{2\} \\ x & \mapsto & \dfrac{2\,x+1}{x-1} \end{array}$

h) $f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}-\{1\} & \to & \mathbb{R}-\{1\} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$

2.3.3 Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble d'arrivée pour que les fonctions suivantes soient des bijections. Puis donner leur réciproque.

a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) = x^2 + x - 6$
c) $f(x) = -\,x^2 + 4\,x$
d) $f(x) = \cos(x)$
e) $f(x) = \tan(x)$
f) $f(x) = \sin(2\,x)$

2.3.4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

a) f est-elle injective ? surjective ?

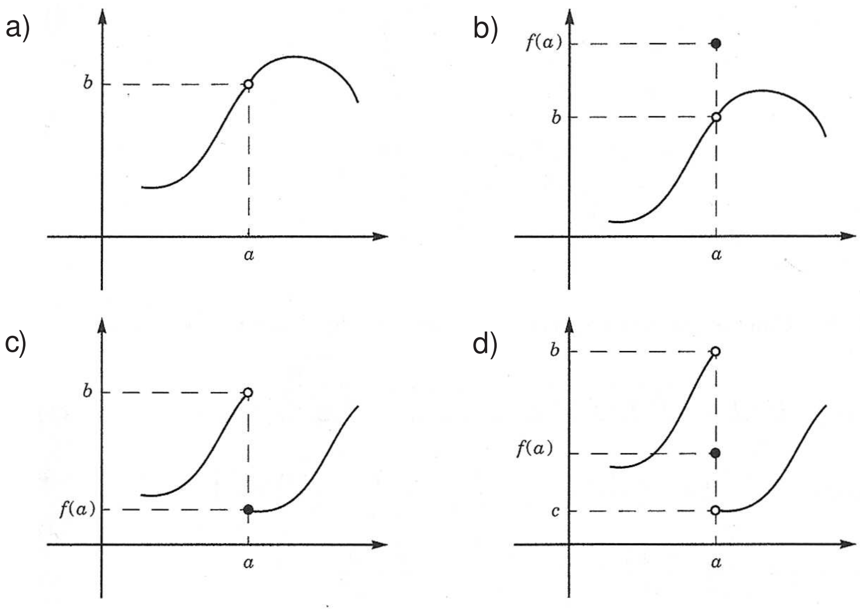
b) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [\,-1\,;\,1\,]$.

c) Montrer que la restriction $g : [\,-1\,;\,1\,] \to [\,-1\,;\,1\,]$, définie par $g(x) = f(x)$ est une bijection.

2.3.5 Soit $f : [\,1\,;+\infty\,[\to[\,0\,;+\infty\,[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. La fonction f est-elle bijective ?

2.4 Limites de fonctions

2.4.1 Lire les limites : $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ <}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ >}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.



2.4.2 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 1}(4x^3 - 2x^2 + x - 1)$

b) $\lim\limits_{x\to -2}(x^2 - 5x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x + 3x^2}{x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to 4}(-5)$

e) $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x^2 - 5}$

f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + x^2 + x}$

g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x) + 1}{2 - \tan(x)}$

2.4.3 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{2x-6}$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{100x^2}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x+4)(x-2)}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$

f) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4x}{x^2-16}$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^3-4x^2-7x+10}$

h) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{x^2+3x-4}$

2.4.4 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}$

b) $\lim\limits_{x\to 25} \dfrac{\sqrt{x}-5}{x-25}$

c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{4-\sqrt{16+h}}{h}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$

e) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3}$

f) $\lim\limits_{t\to 2} \dfrac{1+\sqrt{t-2}}{t}$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-1}}$

h) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x+\sqrt{x+6}}{x+\sqrt{2-x}}$

2.4.5 Calculer, si elles existent, la limite à gauche, la limite à droite et la limite des fonctions suivantes pour x tendant vers x_0 :

a) $f(x) = \dfrac{|x|}{x} \qquad x_0 = 0$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+|x|}{|x|} \qquad x_0 = 0$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{|x|} \qquad x_0 = 0$

d) $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x^2-3x+2} \qquad x_0 = 2$

2.4.6 Utiliser le théorème « des deux gendarmes » pour déterminer :

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

2.4.7 Montrer que si $0 \leq f(x) \leq 3$ pour tout x, alors $\lim\limits_{x\to 0}(x \cdot f(x)) = 0$.

2.4.8 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{5x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(7x)}{\sin(3x)}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(x-1)}{x-1}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$

h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$

2.4.9 En amplifiant chaque fraction par $\cos(x)+1$, montrer que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\frac{1}{2}$$

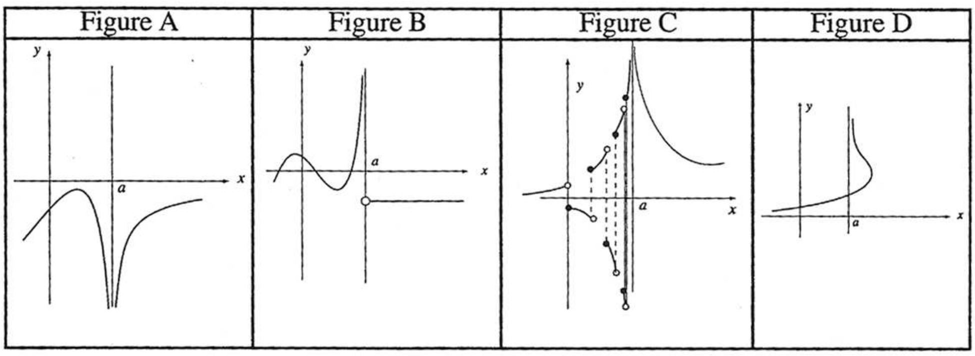
2.4.10 Trouver une fonction f non définie en a telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$:

a) $a=2$ et $b=3$ b) $a=-1$ et $b=7$

2.4.11 On donne la parabole d'équation $y=x^2$. Pour tout point M de la courbe (distinct de l'origine O), on trace la médiatrice du segment $[OM]$. Celle-ci coupe l'axe des ordonnées en un point N. Vers quelle valeur tend l'ordonnée du point N lorsque le point M tend vers O ?

2.4.12 Calculer la valeur limite de la solution la plus proche de zéro de l'équation $ax^2 + 3x + 1 = 0$ lorsque le coefficient a tend vers 0.

2.4.13 Dire pour chacune des quatre figures ci-dessous quelles sont les notations autorisées parmi 1), 2), ..., 9) :



$$\lim_{x\to a} f(x)=\begin{cases} 1) & \infty \\ 2) & +\infty \\ 3) & -\infty \end{cases} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ <}} f(x)=\begin{cases} 4) & \infty \\ 5) & +\infty \\ 6) & -\infty \end{cases} \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)=\begin{cases} 7) & \infty \\ 8) & +\infty \\ 9) & -\infty \end{cases}$$

2.4.14 Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to -2} \frac{x^2+3x+6}{(x+2)^2}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^2+2x-15}{x^2+8x+15}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2-3x}{x^3}$

d) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 5\\ >}} \frac{x-3}{5-x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} (2x^2-5x+3)\frac{1}{x-1}$

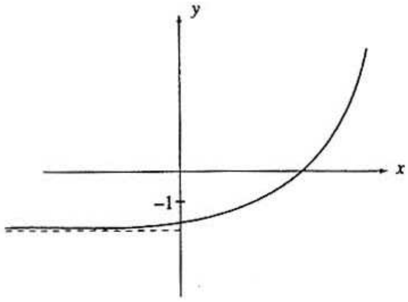
f) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{x-1}\right)$

g) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to -2\\ <}} \frac{x-1}{x+2}$

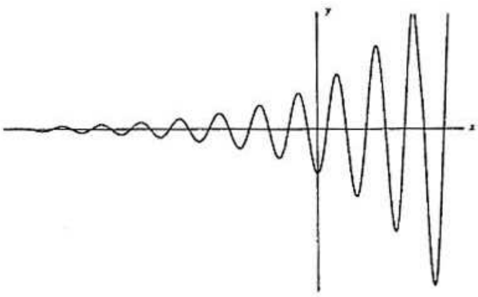
h) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$

2.4.15 Lire les limites : $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to \infty} f(x)$.

a)



b)



2.4.16 Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{2x-4}{-3x+1}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{-3x^2+1}{x+2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x^2+4x+29}{x^2-2x+4}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{(3x+4)(x-1)}{(2x+7)(1-5x)}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{(x+1)^7(2x+3)^4}{(2x+1)^3(x-98)^8}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\frac{2x^2-1}{x-1}+1-2x\right)$

g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2x-x^3}{3x+1}+x-1\right)$

h) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\frac{1+5x-3x^2}{x-2}+3x+1\right)$

2.4.17 Calculer, si elles existent, $\lim\limits_{x\to-\infty}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}$ pour les fonctions f suivantes :

a) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x$

b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2-4x+3}}{x+1}$

c) $f(x)=\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+4}$

d) $f(x)=\dfrac{2x-\sqrt{4x^2+2x-5}}{x+3}$

e) $f(x)=2x-\cos(x)$

f) $f(x)=\dfrac{2x-\cos(x)}{x-1}$

g) $f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

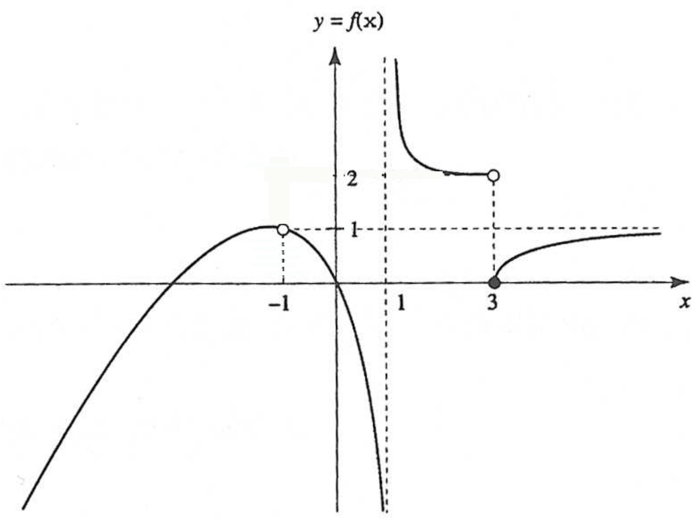
h) $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2.4.18 Représenter le graphe d'une fonction pour laquelle toutes les conditions suivantes sont vérifiées :

$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=2,\ \lim\limits_{x\to-3}f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=4,\ \lim\limits_{\substack{x\to2\\>}}f(x)=3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}}f(x)=0.$

2.5 Continuité

2.5.1 Déterminer la nature des discontinuités de la fonction f dont le graphe est représenté ci-dessous :



2.5.2 Déterminer la nature des discontinuités des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+4x+3}{x^2-1}$

c) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

d) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-5x}{x^4-5x^3}$

e) $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{, si } x \leq -1 \\ 4-2x & \text{, si } x > -1 \end{cases}$

f) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

2.5.3 Sur quel ensemble les fonctions ci-dessous sont-elles continues ?

a) $f(x) = \dfrac{x^4+17}{6x^2+x-1}$

b) $f(x) = 2x + \sqrt{25-x^2}$

c) $f(x) = \arcsin(x^2-1)$

d) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2+x)$

e) $f(x) = E(x) - x$

f) $f(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

2.5.4 Montrer que l'équation $\cos(x) = x$ possède une solution dans $[0;1]$.

2.5.5 Étudier le signe des fonctions suivantes :

a) $f(x) = -x + \sqrt{5x-4}$

b) $f(x) = x\sqrt{9-x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{|\ x+1\ |}{x^2}$

d) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$, sur $[0;2\pi]$

2.6 Asymptotes

2.6.1 Pour les fonctions suivantes, on demande : l'ensemble de définition, les asymptotes (avec étude de position) et le tracé du graphe.

a) $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x-2}$

c) $f(x) = \dfrac{2x^2+6x}{(x+2)^2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{4-x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2-4x}{x^2-4x+3}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-4}$

2.6.2 Déterminer l'ensemble de définition et les asymptotes des fonctions f données par :

a) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$

b) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3}}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{(x-3)^2}}$

e) $f(x) = 2x - 3 - \sqrt{4x^2 + 6x}$

f) $f(x) = \dfrac{3x - \sqrt{9x^2 + 2x + 1}}{2x}$

2.6.3 On considère les 12 fonctions rationnelles :

$$f_1(x) = \frac{4x^2}{2x^2+1} \qquad f_2(x) = -2x + 5 + \frac{1}{x+1} \qquad f_3(x) = \frac{2x}{x+1}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x-7} \qquad f_5(x) = \frac{2x}{x-7} \qquad f_6(x) = \frac{1}{(x+1)(x+10)}$$

$$f_7(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \qquad f_8(x) = -2x + 5 + \frac{1}{x-5} \qquad f_9(x) = 1 + \frac{7}{x^2-4}$$

$$f_{10}(x) = 1 + \frac{7}{x^2+4} \qquad f_{11}(x) = -2x + 5 + \frac{1}{x^2+5} \qquad f_{12}(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x+10)}$$

Déterminer, sans aucun calcul, parmi les fonctions rationnelles proposées ci-dessus, laquelle est caractérisée par les asymptotes suivantes :

	Asymptote verticale	*Asymptote horizontale ou oblique*
1)	$x = -1$	$y = 0$
2)	$x = -1$, $x = -10$	$y = 2$
3)	aucune	$y = 2$
4)	$x = 7$	$y = 2$
5)	$x = -2$, $x = 2$	$y = 1$
6)	$x = 5$	$y = -2x + 5$
7)	$x = -1$	$y = 2$
8)	aucune	$y = 1$
9)	$x = -1$	$y = -2x + 5$
10)	$x = 7$	$y = 0$
11)	aucune	$y = -2x + 5$
12)	$x = -1$, $x = -10$	$y = 0$

2.6.4 Trouver une fonction admettant les asymptotes suivantes :

a) $x = -4$, $x = 2$, $y = 3$

b) $y = 2x - 5$, $x = 1$

2.6.5 Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel n, les asymptotes de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^n + 3}{x^2 - 9}$.

2.6.6 Déterminer a, b et c sachant que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax^2 + 6x + 8}{x^2 + bx + c}$$

admet les droites $x = 0$, $x = 2$ et $y = 1$ comme asymptotes.

2.6.7 Déterminer a, b et c sachant que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx}{x + c}$$

admet les droites $x = 3$ et $y = x + 2$ comme asymptotes.

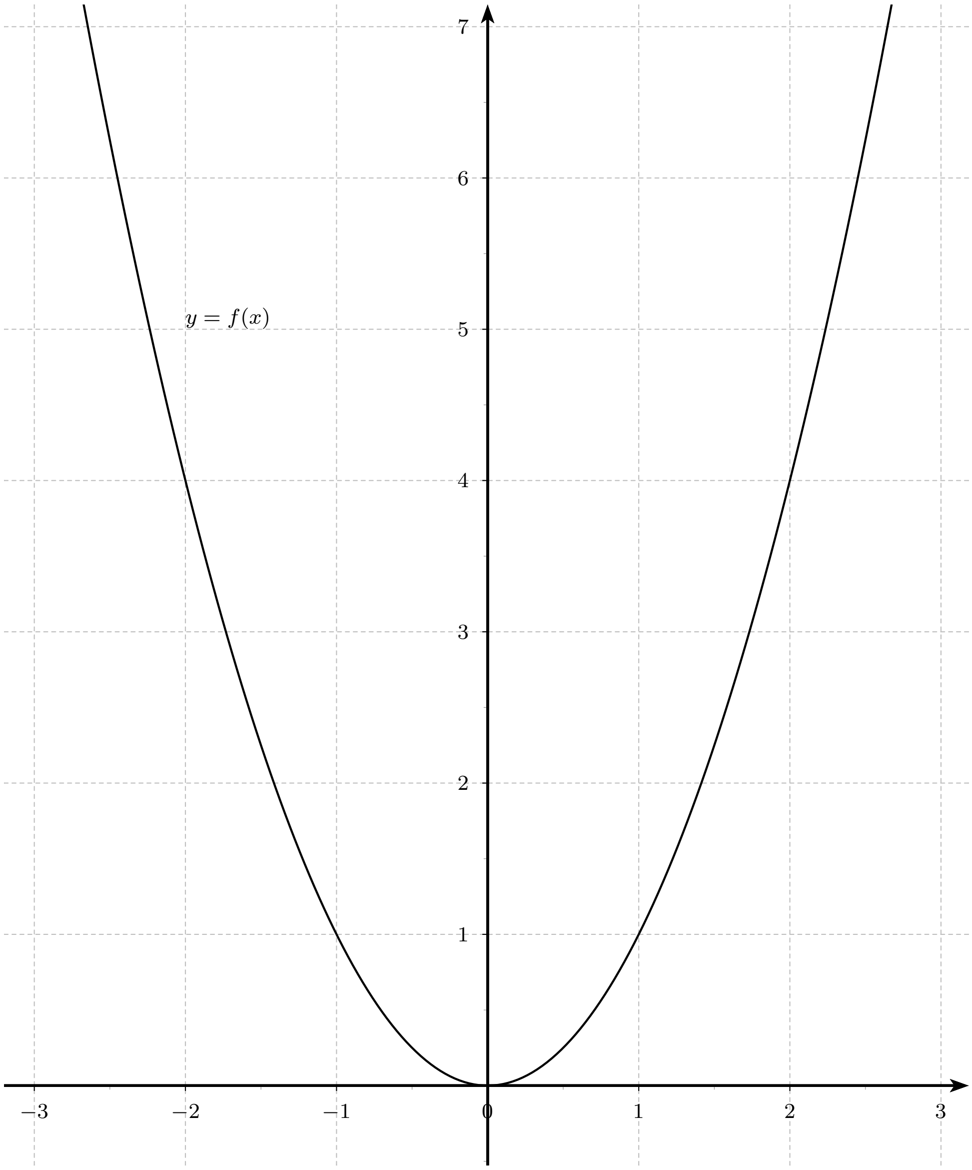
2.6.8 Déterminer a, b, c et d sachant que la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$$

dont le graphe passe par le point $A(2; -2)$ et qui admet les droites $x = -3$ et $y = -2x + 1$ comme asymptotes.

2.7 Dérivées

2.7.1 On donne une représentation du graphique de la fonction $f(x) = x^2$.



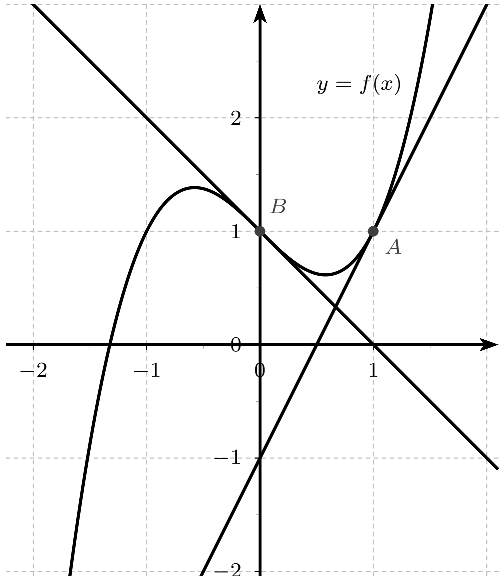
Soit les points $A(-1;1)$, $B(0;0)$, $C(2;4)$ et $D(1;1)$.

a) Déterminer la pente de la droite qui passe par les points D et C.

b) Déterminer graphiquement la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ aux points A, B, C et D.

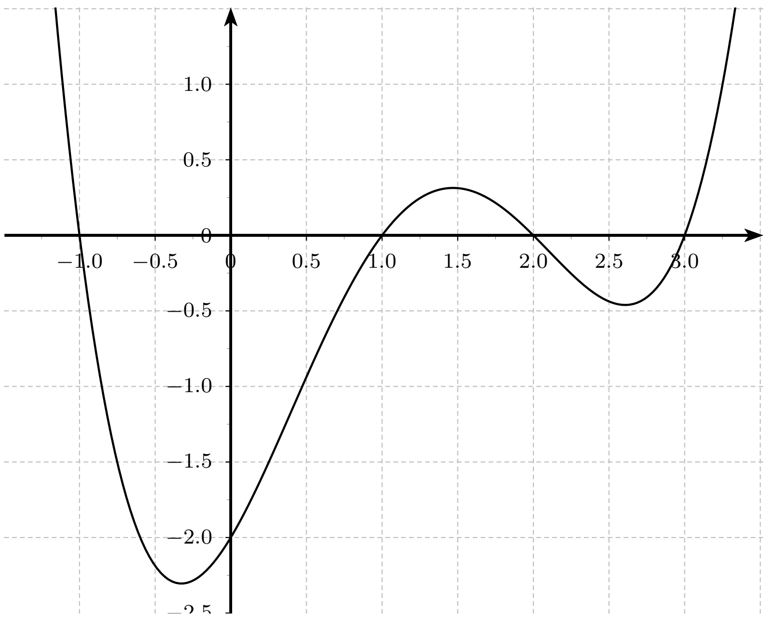
c) Donner ensuite une équation de la tangente en ces points.

2.7.2 Voici la représentation graphique d'une fonction $f(x)$. Les tangentes en A et B sont représentées.
Déterminer graphiquement $f'(0)$ et $f'(1)$.

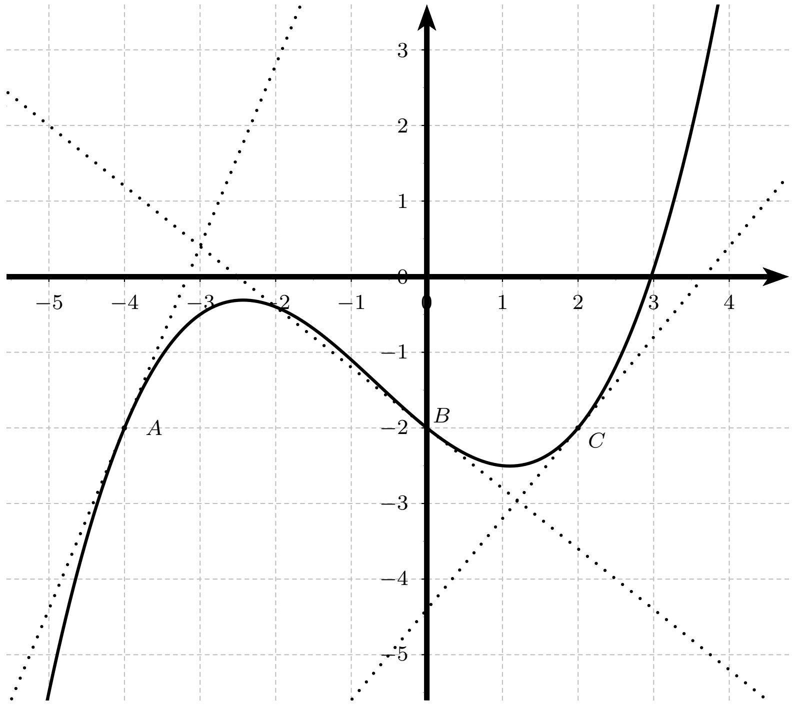


2.7.3 Sur le graphe de la fonction $f(x)$ ci-dessous, indiquer les valeurs approximatives de x pour lesquelles :

a) $f(x) = 0$ b) $f'(x) = 0$ c) $f'(x) = 1$ d) $f'(x) = -1$



2.7.4 Dans la représentation graphique ci-dessous de la fonction f, on a représenté 3 tangentes à la courbe $y = f(x)$ aux points A, B et C.



Donner les valeurs approximatives de :

a) $f'(0)$ b) $f'(-4)$ c) $f'(2)$ d) $f(0)$

2.7.5 Pour chaque question, déterminer la bonne réponse.

a) Si $f'(3) = 2$, alors la tangente au point d'abscisse $x = 3$ peut avoir pour équation :

— $y = 2$ — $y = 2\,x - 5$ — $y = 3\,x + 2$

b) Si $f'(1) = 0$, alors la tangente au point $M(1; f(1))$ peut avoir pour équation :

— $y = 0$ — $y = x$ — $y = x + 1$

c) Si la tangente au point d'abscisse $x = 2$ a pour équation $y = -x + 5$, alors :

— $f'(2) = 5$ — $f'(2) = -1$ — $f'(2) = x - 1$

d) Si $f(1) = 3$ et $f'(1) = -1$, alors la tangente au point d'abscisse $x = 1$ peut avoir pour équation :

— $y = -x + 3$ — $y = 3x - 1$ — $y = -x + 4$

2.7.6 Sachant que $f'(2) = -1$ et que $f(2) = 4$, déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse $x = 2$.

2.7.7 La droite d d'équation $y = -2x + 7$ est tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 3$.
Déterminer $f'(3)$ et $f(3)$.

2.7.8 Soit la fonction $f(x) = x^2 + 4$.

a) Calculer $f(5)$ et $f(5 + h)$, avec $h \in \mathbb{R}$.

b) En déduire une expression simplifiée de $\dfrac{f(5+h) - f(5)}{h}$ pour h non nul.

c) A l'aide d'un calcul de limite, déterminer le nombre dérivé de f en $x = 5$.

2.7.9 Soit la fonction $f(x) = x^2 + 3\,x - 4$.

a) Calculer $f(-2)$ et $f(-2 + h)$, avec $h \in \mathbb{R}$.

b) En déduire une expression simplifiée de $\dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$ pour h non nul.

c) A l'aide d'un calcul de limite, déterminer le nombre dérivé de f en $x = -2$.

2.7.10 Dans une expérience de laboratoire, le nombre de bactéries N après t heures est donné par la fonction $N = f(t)$.

a) Quelle est la signification de $f'(5)$? En quelles unités s'exprime $f'(5)$?

b) Si la quantité de nourriture et d'espace ne sont pas limités, lequel des deux nombres $f'(5)$ et $f'(10)$ sera le plus grand ?

2.7.11 Calculer $f'(x)$, à partir de la définition de la dérivée, si :

a) $f(x) = 4$

b) $f(x) = 2x - 5$

c) $f(x) = x^2 + 1$

d) $f(x) = \dfrac{1}{3x + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{4x - 1}{x + 1}$

f) $f(x) = \sqrt{x - 3}$

2.7.12 On donne la fonction $f(x) = -x^2 + x + 2$.

a) Calculer sa dérivée.

b) En déduire les pentes des tangentes au graphe de f aux points où il coupe les axes de coordonnées.

c) Représenter le graphe de la fonction, ainsi que les tangentes dont on a calculé la pente.

2.7.13 Les fonctions suivantes sont-elles dérivables en a ?

a) $f(x) = \mid x-2 \mid \ , a=2$

b) $f(x) = x\sqrt{\mid x \mid} \ , a=0$

c) $f(x) = \sqrt{1+\sin(2x)} \ , a = -\dfrac{\pi}{4}$

d) $f(x) = \mid x^2-1 \mid -2 \ , a=-1$

2.7.14 On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{, si } x<0 \\ 0 & \text{, si } x \geq 0 \end{cases}$.
Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

2.7.15 On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{, si } x<0 \\ 0 & \text{, si } x \geq 0 \end{cases}$.

a) Montrer que f est continue en 0.
b) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

2.7.16 On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Calculer la dérivée de f en $a \in]-1;1[$, puis étudier la dérivabilité de f en -1 et 1.

2.7.17 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 47$

b) $f(x) = 3x$

c) $f(x) = x^5$

d) $f(x) = 8x^7$

e) $f(x) = 5x^0$

f) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3$

g) $f(x) = x^3+x^2+x+1$

h) $f(x) = 7x^4-3x+8$

i) $f(x) = x^2+5x-6$

j) $f(x) = x^3+5x^2-2x+4$

k) $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + 2x + 4$

l) $f(x) = 2x^5 - \dfrac{7}{6}x^3 + \dfrac{3}{4}x^2 - x + \sqrt{2}$

2.7.18 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (x+1)(x-3)$

b) $f(x) = x(x^2+5)$

c) $f(x) = (7x^2-4x+3)(5-2x)$

d) $f(x) = (2x-1)(2-2x)(1+x)$

e) $f(x) = \dfrac{4-3x}{2x-1}$

f) $f(x) = \dfrac{x-2}{3-x}$

g) $f(x) = \dfrac{5}{2x^2-1}$

h) $f(x) = \dfrac{x^3-10x^2}{1-x}$

i) $f(x) = \dfrac{8x^2-8x+3}{4x^2-1}$

j) $f(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$

k) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}$

l) $f(x) = \dfrac{x^3-4}{3x} + x$

m) $f(x) = \dfrac{x(x+5)}{x^2+x}$

n) $f(x) = \left(x + \dfrac{2}{x^2}\right) x$

o) $f(x) = \dfrac{2x+3(x^2-1)}{3}$

p) $f(x) = \dfrac{x-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}}$

2.7.19 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes, où a, b, c, d, h, m, t et w sont des constantes :

a) $f(x) = mx + h$

b) $f(x) = (w-1)x^3 + w(x-3)$

c) $f(x) = ax^2 + bx + c$

d) $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{x+t}$

f) $f(x) = \dfrac{3x^2+2ax+2a}{x^2+ax+a}$

2.7.20 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (2x+3)^4$

b) $f(x) = (3-x)^5$

c) $f(x) = (x^2+5x+1)^3$

d) $f(x) = (x^3-2x)^7$

e) $f(x) = x^2(5x+2)^3$

f) $f(x) = (2+x)^2(1-x)^3$

g) $f(x) = (2x+5)^3(3x-1)^4$

h) $f(x) = (1-3x)^2(2-x)(x+3)^3$

i) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+3)^2}$

j) $f(x) = \dfrac{x}{(3x+2)^2}$

k) $f(x) = \dfrac{(1-x)^3}{(1+x)^2}$

l) $f(x) = \dfrac{x(x-3)^2}{(x-2)^2}$

2.7.21 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

b) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

c) $f(x) = \sqrt[7]{x^4}$

d) $f(x) = \sqrt{8x^2-5x+3}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2+4}$

f) $f(x) = \sqrt{(4x^2-2x)^3}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2+x+1}$

h) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x^2)^2}$

i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

j) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

k) $f(x) = (1+x)\sqrt{1-x}$

l) $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-2}{x+1}}$

2.7.22 Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sin(x) + 2\cos(x)$

b) $f(x) = \tan(x) - x$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$

d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$

e) $f(x) = \dfrac{\cos(x)+2}{\cos(x)+3}$

f) $f(x) = \dfrac{\sin(x)+1}{1-\sin(x)}$

g) $f(x) = \sin(2x)$

h) $f(x) = \sin^2(x)$

i) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{2}\right) + 3\cos\left(4x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

j) $f(x) = \dfrac{\sin(3x)}{\cos(5x)}$

k) $f(x) = \tan^5(8x)$

l) $f(x) = \sqrt{1-\tan(2x)}$

2.7.23 Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f^{(3)}(x)$ et en déduire $f^{(n)}(x)$ pour les fonctions suivantes :

a) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

b) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

c) $f(x) = \sin(x)$

d) $f(x) = \sqrt{x+1}$

2.7.24 Déterminer les coefficients a, b et c de la fonction $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$, sachant que $f(2) = -1$, $f'(2) = 0$ et $f''(2) = 0$.

2.7.25 Former l'équation de la tangente au graphe de f en son point d'abscisse a, si :

a) $f(x) = 1 + 2x - x^3$, $a = 1$

b) $f(x) = \dfrac{x+3}{x}$, $a = 3$

c) $f(x) = \sqrt{2x+1}$, $a = 4$

d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sin(x) + \cos(x)}$, $a = 0$

2.7.26 En quel point la tangente à la courbe $y = x^2$ a-t-elle une pente égale à -3 ?

2.7.27 Calculer l'abscisse des points en lesquels la tangente au graphe de

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 2$$

est parallèle à la droite passant par $A(-3; 2)$ et $B(1; 14)$.

2.7.28 En quels points la courbe $y = \dfrac{x}{x^2+9}$ a-t-elle une tangente horizontale ?

2.7.29 Déterminer les abscisses en lesquelles les graphes des fonctions $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$ admettent des tangentes parallèles dans $[0; 2\pi]$.

2.7.30 Déterminer la valeur à attribuer au nombre réel m pour que la tangente à la courbe d'équation $y = \sqrt[3]{1 - mx}$ au point où elle coupe Oy soit parallèle à la droite d'équation $y = \dfrac{3}{2}x$.

2.7.31 Déterminer les coefficients a, b, c et d sachant que la courbe $y = \dfrac{x^2 + ax + b}{cx^2 + dx - 2}$:

- admet la droite $x = 2$ comme asymptote verticale,
- n'admet pas d'asymptote horizontale,

- passe par le point $P(1;-2)$ et qu'en ce point la pente de la tangente vaut -5.

2.7.32 Pour quels réels a et b le graphe de la fonction $f(x)=x^3+ax^2+bx$ admet-elle pour tangente au point d'abscisse -1 la droite d'équation $y=x+4$?

2.7.33 Déterminer les équations des tangentes au graphe de f issues du point P :

a) $f(x)=x^2$, $P(5;9)$

b) $f(x)=x^3$, $P(0;-2)$

2.7.34 Quels sont les points de la courbe $y=x^3+x^2$ en lesquels la tangente passe par l'origine ?

2.7.35 Calculer l'angle formé par les courbes en leurs points d'intersection :

a) $y=x^2$ et $y=x^3$,

b) $y=\dfrac{x^2-4}{x^2+1}$ et l'axe Ox,

c) $y=\sin(2x)$ et $y=\dfrac{1}{2}\tan(x)$, avec $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

2.7.36 Déterminer les nombres réels a et b pour lesquels les courbes $y=x^3+ax^2+bx$ et $y=x^2-6x$ sont tangentes en un point d'abscisse 4.

2.7.37 Déterminer $k\in\mathbb{R}$ pour que les courbes $y=\sqrt{x}+k$ et $y=\dfrac{x}{2}+3$ soient tangentes. Calculer le point de tangence.

2.7.38 Quelle valeur faut-il donner au réel a pour que les graphes des fonctions $f(x)=x^2$ et $g(x)=\dfrac{1}{2}-ax^2$ se coupent à angle droit.

2.7.39 On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt[3]{x^3-27}$ sur l'intervalle $[0;3]$. Montrer qu'il existe un point du graphe de f où la pente de la tangente est égale à 1.

2.7.40 On donne la fonction g par $g(x)=\mid x\mid -1$. Alors $g(-1)=g(1)=0$, mais g' ne s'annule pas dans $[-1;1]$. Est-ce un contre-exemple au théorème de Rolle ?

2.7.41 Montrer que la fonction $f(x)=\sin^6(x)+\cos^6(x)+3\sin^2(x)\cos^2(x)$ est constante.

2.7.42 Prouver que, pour tout $x \in [-1; 1]$: $\arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

2.8 Applications de la dérivée

2.8.1 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3+2x^2+x}{x^2-3x}$

b) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+2x-3}{2x^2+3x-9}$

c) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt[3]{x+4}-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1}-2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(3x)-1}{x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x-\sin(x)}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(x)}{\arccos(x)-\pi/2}$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(2\arctan(x)-\pi)$

2.8.2 Étudier la croissance des fonctions suivantes :

a) $f(x)=x^3-3x$

b) $f(x)=-x^4+2x^2+12$

c) $f(x)=(x+2)^3(x-3)^2$

d) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+5}$

e) $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x+2}$

f) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

g) $f(x)=x^2\sqrt{6-x^2}$

h) $f(x)=\sin(x)(1+\cos(x))$, sur $[0;2\pi]$

2.8.3 Dessiner un graphe possible de $y=f(x)$ connaissant les informations suivantes sur la dérivée :

- $f'(x)<0$, pour $x\in]-\infty;-3[$,
- $f'(x)=0$, pour $x=-3$ et $x=0$,
- $f'(x)>0$, pour $x\in]-3;0[\cup]0;+\infty[$.

2.8.4 Montrer que la fonction $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ admet un maximum d'abscisse 1. En déduire lequel des deux nombres ci-dessous est le plus grand,

$$\frac{1,000\ 000\ 000\ 003}{1,000\ 000\ 000\ 003^2+1} \quad \text{ou} \quad \frac{1,000\ 000\ 000\ 004}{1,000\ 000\ 000\ 004^2+1}\ ?$$

2.8.5 La concentration $C(t)$, en milligrammes par litre, d'un certain médicament dans le sang d'un patient est donnée par

$$C(t)=\frac{0,16t}{t^2+4t+4}$$

où t désigne le nombre d'heures suivant la prise du médicament. Après combien de temps la concentration est-elle maximale ?

2.8.6 Déterminer $k \in \mathbb{R}^*$ de telle sorte que la fonction $f(x) = \dfrac{x^2}{x+k}$ admette un extremum dont l'ordonnée est égale à 8. Préciser ses coordonnées, sa nature (minimum ou maximum) et son type (global ou local).

2.8.7 Étudier la courbure des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^2 + 8x + 10$

b) $f(x) = x^3 + 3x + 8$

c) $f(x) = (x-1)^4$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$

f) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^3+1}$

g) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

h) $f(x) = \cos^2(x)$, sur $[0; 2\pi]$

2.8.8 Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $y = x^3 - 3x^2$ en son point d'inflexion.

2.8.9 Déterminer les paramètres a, b et c tels que $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$ admette en $x = 1$ un point d'inflexion en lequel la tangente au graphe soit la droite d'équation $y = 16x - 5$.

2.8.10 Étudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^4 + 4x^3$

b) $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$

c) $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)^2 \mid x-2 \mid$

d) $f(x) = \dfrac{2x^2}{9-x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

f) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(2-x)^2}$

g) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

h) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$

i) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

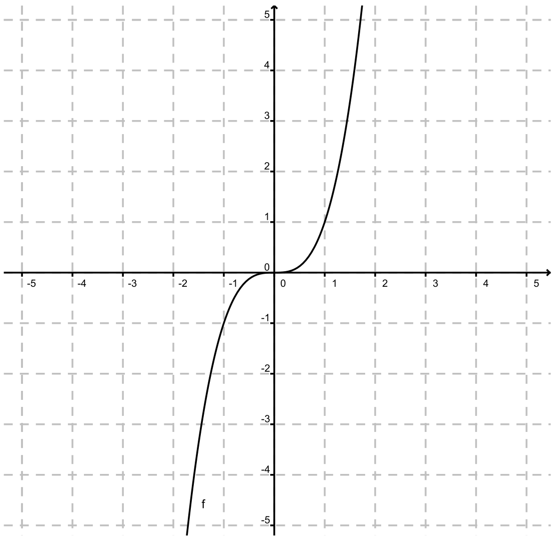
j) $f(x) = \sin^2(x) - 2\cos(x)$

k) $f(x) = \sin(x) + \sqrt{3}\cos(x)$

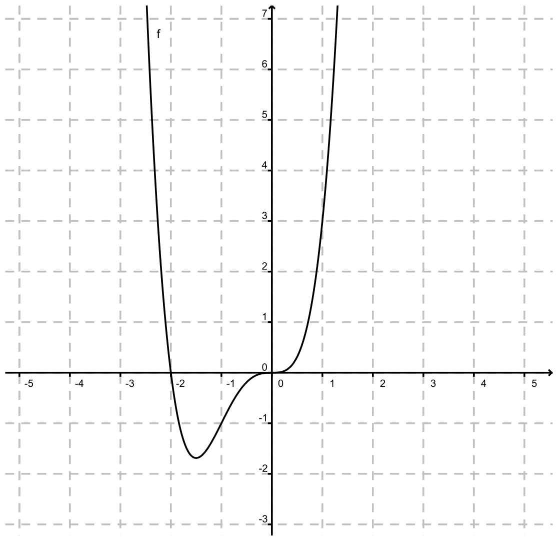
l) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1-\cos(x)}$

2.8.11 Pour chacune des fonctions f représentées graphiquement ci-dessous, déterminer : l'ensemble de définition, la parité, la périodicité, le signe, les équations des asymptotes avec la position, la croissance avec les coordonnées des extremums et la courbure avec les coordonnées des points d'inflexion.

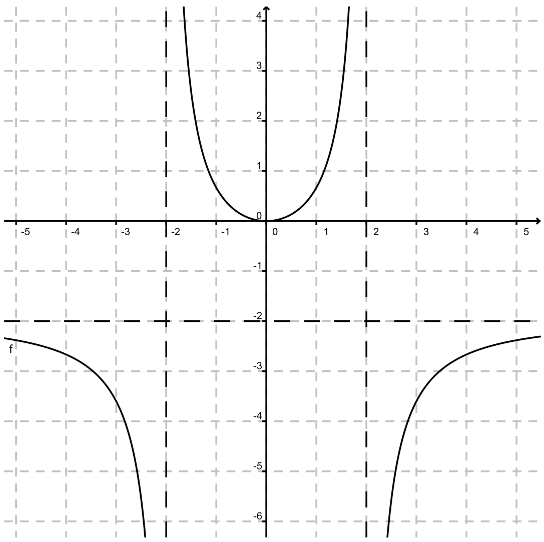
a)



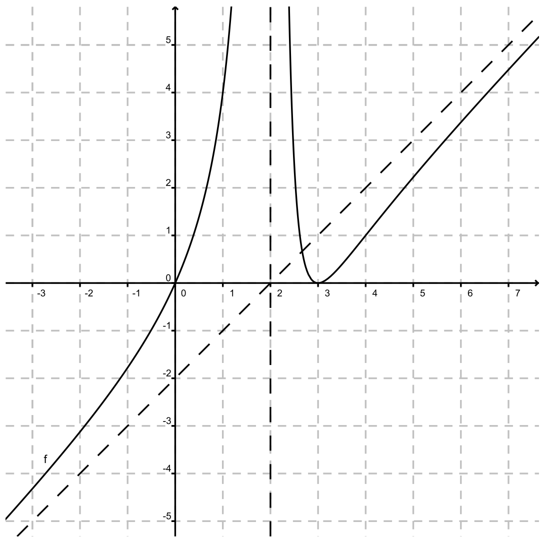
b)



c)



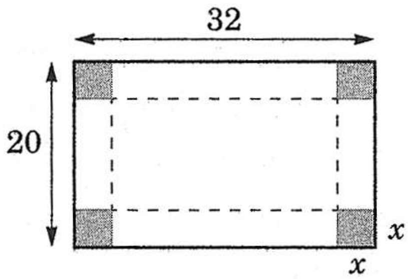
d)



2.8.12 Parmi tous les rectangles dont le périmètre est égal à 4 m, quel est celui qui a la plus grande surface ?

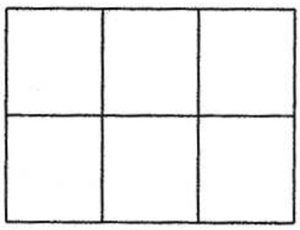
2.8.13 Une feuille rectangulaire doit contenir 392 cm^2 de texte imprimé. Les marges supérieure et inférieure doivent être de 2 cm chacune ; les marges latérales de 1 cm chacune. Déterminer les dimensions de la feuille nécessitant le moins de papier.

2.8.14 On construit une boîte rectangulaire sans couvercle en découpant quatre carrés aux coins d'une feuille de carton mesurant 32 cm sur 20 cm et en relevant ensuite les rectangles latéraux. Quelle doit être la dimension du carré enlevé pour obtenir la boîte de volume maximal ?



2.8.15 On construit un conteneur de forme cylindrique sans couvercle de volume 324π cm^3. Le matériau utilisé pour le fond coûte 15 centimes par cm^2 et celui utilisé pour la paroi latérale 5 centimes par cm^2. Si la fabrication ne donne lieu à aucun déchet, quelles sont les dimensions du conteneur le plus économique ?

2.8.16 On dispose de 288 m de clôture grillagée pour construire 6 enclos rectangulaires pour un zoo selon le plan ci-dessous. Quelles dimensions donner à chacun de ces enclos de manière à maximiser leur surface au sol.

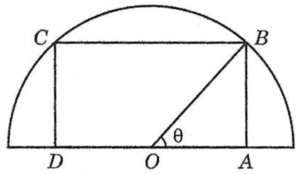


2.8.17 Calculer l'équation de la droite de pente négative qui passe par le point $A(3;2)$ et qui délimite avec les axes de coordonnées un triangle d'aire minimale.

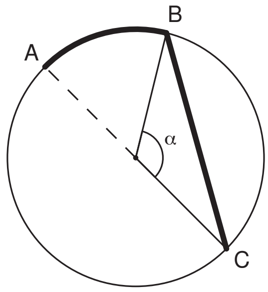
2.8.18 Quel est le point de la courbe $y = \sqrt{2x-1}$ qui est le plus proche du point $P(3;0)$?

2.8.19 On considère la parabole γ d'équation $y = 1 - x^2$ ainsi qu'un point M de γ situé dans le premier quadrant. La tangente à γ au point M coupe l'axe Ox en un point A et l'axe Oy en B. Déterminer les coordonnées du point M pour que l'aire du triangle OAB soit minimale.

2.8.20 Un rectangle $ABCD$ est inscrit dans un demi-cercle de diamètre égal à 2 cm. Déterminer les dimensions du rectangle d'aire maximale en prenant l'angle θ comme variable.

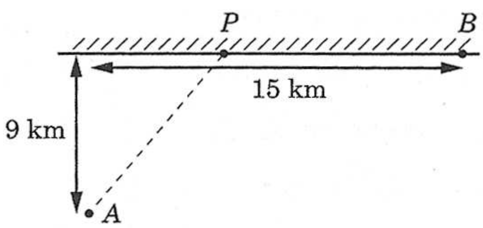


2.8.21 Une canalisation doit relier deux points A et C en bordure d'un lac circulaire de 2 km de rayon. Ces deux points sont situés sur un même diamètre de ce cercle. La canalisation passe sur terre entre les points A et B, sous l'eau entre les points B et C. Sachant que le coût de cette installation est de 3'000.- le mètre sur terre et 5'000.- le mètre sous l'eau, déterminer la valeur en degrés de l'angle $\alpha \in [0; 180]$ pour laquelle le coût de cette installation est minimal.

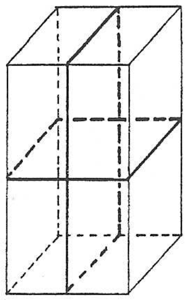


2.8.22 A midi, le bateau B est situé à 45 milles au nord du bateau C. Le bateau B se dirige vers le sud à la vitesse de 9 noeuds et le bateau C se dirige vers l'ouest à la vitesse de 12 noeuds. A quelle heure les bateaux seront ils à une distance minimale ? (Rappel : un noeud = un mille par heure).

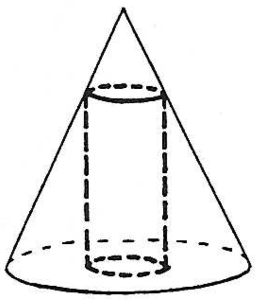
2.8.23 Le gardien d'un phare (point A) doit rejoindre le plus rapidement possible la maison côtière (point B). Il se déplace en canot à la vitesse de 4 km/h et à pied à la vitesse de 5 km/h. Où doit il accoster (point P) pour que le temps de parcours soit minimal ? La côte est supposée rectiligne.



2.8.24 On se propose d'envoyer un colis de volume égal à 12 dm^3 dont la forme est celle d'un parallélépipède rectangle de base carrée. Son emballage est maintenu à l'aide d'une ficelle comme le montre la figure. Trouver les dimensions du colis permettant d'utiliser le moins de ficelle possible.



2.8.25 Calculer les dimensions du cylindre de plus grand volume qu'il est possible de cacher sous un cône circulaire droit de rayon 4 cm et de hauteur 12 cm.



2.9 Solutions des exercices

Graphes

2.1.1

a) $x = 0$ et $x = 2$

b) $S \cong \{0.5\,;\,1.5\}$

c) Max $(1\,;\,5)$

Interprétations :

a) La balle était au niveau du sol au moment du lancer, et après 2 secondes.

b) La balle était à 4 mètres de hauteur après environ une demi-seconde, et après environ 1 seconde et demi.

c) La balle a atteint son point le plus haut après 1 seconde. Elle était alors à 5 mètres de hauteur.

2.1.2

a) $f(0) \cong 4.3$

b) $f(3) \cong 3.2$

c) $S = \{1\,;\,4\,;\,6\}$

d) min $(\sim 5.2\,;\,\sim 0.4)$

e) $x = 0$

Interprétations :

a) A midi, l'intensité de la pluie était de 4.3 mm/h.

b) A 15 heures, l'intensité de la pluie était de 3.2 mm/h.

c) Les moments où l'intensité était de 2 mm/h sont : à 13h, à 16h et à 18h.

d) Le moment où il a plu le moins fort était à 17h10. A ce moment, il a plu à 0.4 mm/h.

e) Le moment où la pluie était la plus forte était à midi.

2.1.3

a) ~ 70

b) ~ -40

c) $S = \{\,-3\,;\,1\,;\,4\,;\,6\,\}$

d) ~ -1.6

e) ~ -180

Interprétations :

f)
- Au début de l'année 2010, le bénéfice était d'environ 70'000 francs.
- Au début de l'année 2012, le bénéfice était d'environ -40'000 francs, soit une perte de 40'000 francs.
- Au début des années 2007, 2011, 2014 et 2016, le bilan financier était à zéro. L'entreprise n'avait donc ni bénéfice, ni perte.

- Le bénéfice de l'entreprise était maximal vers l'été 2008.
- La perte la plus grande de l'entreprise était de 180'000 francs.

g) Elle a été déficitaire durant les années 2011, 2012, 2013 et 2016.

h) Oui, le bénéfice était positif durant cette année.

i) Même s'il était négatif, il était en croissance (en augmentation).

2.1.4

a) $f(1) = -5$

b) $\min(3\,;\,-9)$

c) $S \cong \{\,1.6\,;\,3.5\,\}$

d) a) Après 1 seconde, le plongeur était à 5 mètres de profondeur.
b) Le plongeur était au point le plus bas après 3 secondes ; il était alors à 9 mètres de profondeur.
c) Le plongeur était à 7 mètres de profondeur à deux moments : après 1.6 secondes et après 3.5 secondes.

e) Après 6 secondes.

f) Non, il est redescendu un peu après 5 secondes, lorsqu'il était à 1 mètre de profondeur.

2.1.5

a) $f(0) = 3\,;$

b) 12

c) $\min(2\,;\,2)$

d) $S = \{\,4\,;\,10\,\}$

Interprétations :

a) La force du vent au centre du typhon vaut 3.

b) La force du vent vaut au maximum 12.

c) La force du vent est minimale à 20 mètres du centre du typhon. Elle vaut alors 2.

d) La force du vent vaut 5 à deux endroits dans le typhon : à 40 mètres du centre et à 100 mètres du centre.

2.1.6

a) Il a fait 0 degré à 1h du matin et à 8h du matin.

b) La température maximale a été de 12 degrés.

c) Les routes ont été glissantes de minuit à environ 10 heures et quart.

d) La température a augmenté entre 4h du matin et 18h30 environ.

2.1.7

a) Le prix de base est moins cher chez le fournisseur B.
La minute de communication est le même prix chez les deux fournisseurs.

b) La hauteur maximale est la même sur les deux balançoires.
La fréquence est plus élevée sur la balançoire A.

2.1.8

a) $f(0) = -1.5$
b) $f(-2) = -3.2$
c) $f(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in \{-3; 4, 2\}$
d) $f(x) = 2 \Longleftrightarrow x \in \{-3.3; 4.8\}$
e) si $a = -3.5$
f) $f(x) = x \Longleftrightarrow x \in \{-2.4; 5.3\}$
g) $f(x) = -x \Longleftrightarrow x \in \{-3.5; 0.7\}$

Généralités sur les fonctions

2.2.1 a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R}$; c) $\mathbb{R}$; d) $\mathbb{R}$; e) $\mathbb{R}$; f) $\mathbb{R}$.

2.2.2 a) $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3}{2}\right\}$; b) $\mathbb{R}\backslash\{-4;4\}$; c) $\mathbb{R}^*\backslash\{-1\}$; d) $\mathbb{R}^*$; e) $\mathbb{R}\backslash\{-1;5\}$; f) $\mathbb{R}\backslash\{-1;2;1\}$.

2.2.3 a) $\mathbb{R}$; b) $[5;+\infty[$; c) $]-\infty;1]\cup[5;+\infty[$; d) $]-\infty;3]\backslash\{1\}$; e) $]-\infty;-1]\cup]4;+\infty[$; f) $]-1;1[$.

2.2.4 $ED(g) = \,]-\infty\,;\,-1]\cup[1\,;\,5]\cup[7\,;\,+\infty[$

2.2.5 a) $\left]-\infty;\frac{7}{2}\right[$; b) $\mathbb{R}$; c) $\mathbb{R}_+^*\backslash\{10\}$; d) $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$; e) $]-2;3[$; f) $\mathbb{R}$.

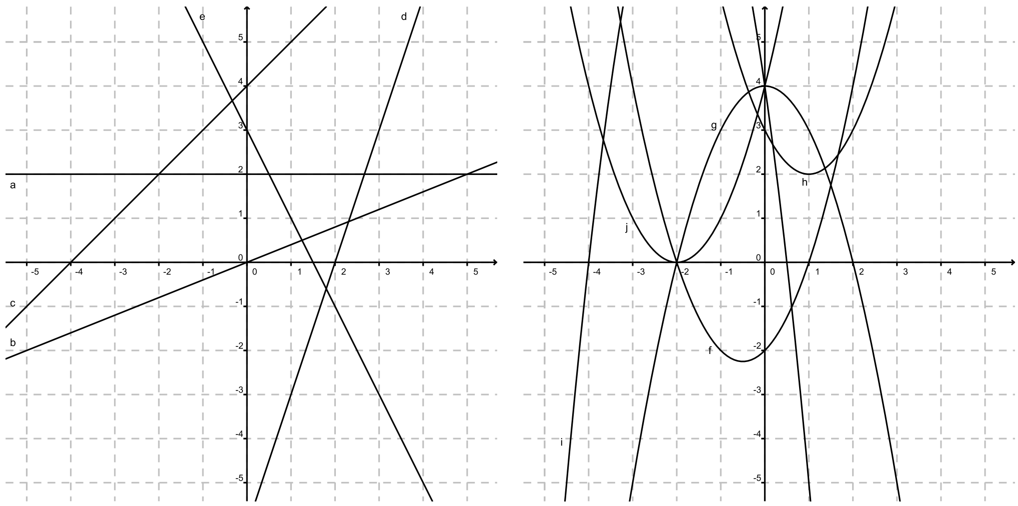
2.2.6 a) $(f+g)(x) = x^2+3$, $D_{f+g} = \mathbb{R}$; $(f-g)(x) = -x^2+3$, $D_{f-g} = \mathbb{R}$; $(f\cdot g)(x) = 3x^2$, $D_{f\cdot g} = \mathbb{R}$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{3}{x^2}$, $D_{f/g} = \mathbb{R}^*$; b) $(f+g)(x) = \frac{3x^2+6x}{(x-4)(x+5)}$, $D_{f+g} = \mathbb{R}\backslash\{-5;4\}$; $(f-g)(x) = \frac{x^2+14x}{(x-4)(x+5)}$, $D_{f-g} = \mathbb{R}\backslash\{-5;4\}$; $(f\cdot g)(x) = \frac{2x^2}{(x-4)(x+5)}$, $D_{f\cdot g} = \mathbb{R}\backslash\{-5;4\}$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x+10}{x-4}$, $D_{f/g} = \mathbb{R}^*\backslash\{-5;4\}$; c) $(f+g)(x) = 3\sqrt{x}$, $D_{f+g} = \mathbb{R}_+$; $(f-g)(x) = -\sqrt{x}$, $D_{f-g} = \mathbb{R}_+$; $(f\cdot g)(x) = 2x$, $D_{f\cdot g} = \mathbb{R}_+$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{2}$, $D_{f/g} = \mathbb{R}_+^*$; d) $(f+g)(x) = \ln(x-x^2)$, $D_{f+g} =]0;1[$; $(f-g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $D_{f-g} =]0;1[$; $(f\cdot g)(x) = \ln(x)\ln(1-x)$, $D_{f\cdot g} =]0;1[$; $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(1-x)}$, $D_{f/g} =]0;1[$.

2.2.7 a) $(f\circ g)(x) = 4x-2$; b) $(h\circ f)(x) = 4x^2$; c) $(g\circ h\circ f)(x) = 8x^2-1$.

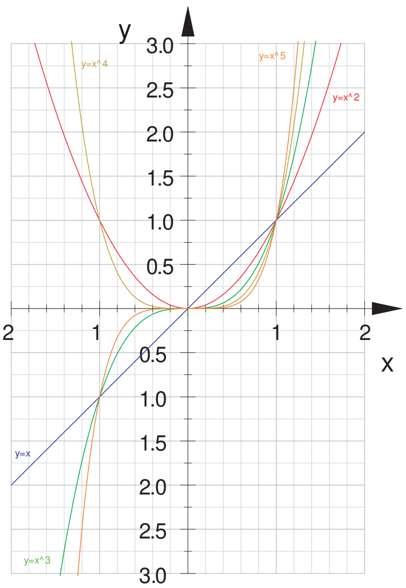
2.2.8 a) $(f\circ g)(x) = x+2-3\sqrt{x+2}$, $D_{f\circ g} = [-2;+\infty[$, $(g\circ f)(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$, $D_{g\circ f} =]-\infty;1]\cup[2;+\infty[$; b) $(f\circ g)(x) = \frac{1}{x+3}$, $D_{f\circ g} = \mathbb{R}^*\backslash\{-3\}$, $(g\circ f)(x) = \frac{6x+4}{x}$, $D_{g\circ f} = \mathbb{R}^*\backslash\left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

2.2.9 a) $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = 3x+1$; b) $g(x) = \frac{1}{x}$, $h(x) = x^2+x+3$; c) $g(x) = x^7$, $h(x) = x+2$; d) $g(x) = \frac{x+2}{x-4}$, $h(x) = \sqrt{x}$; e) $g(x) = \log(x)$, $h(x) = x^2+4$; f) $g(x) = 3^x$, $h(x) = 2x-5$.

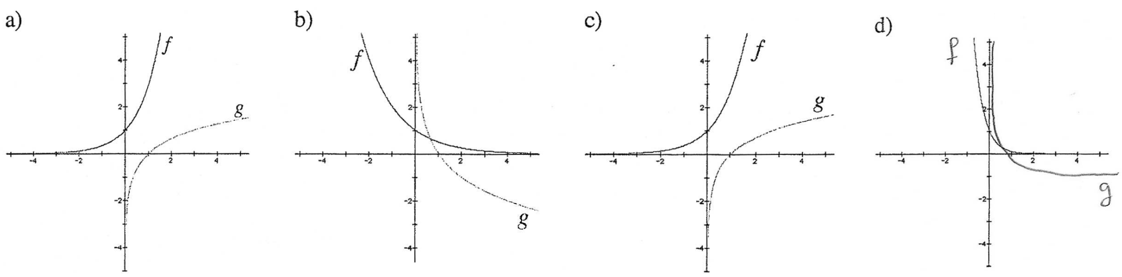
2.2.10



2.2.11

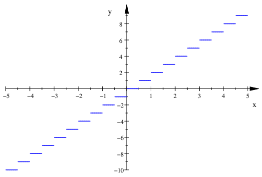


2.2.12

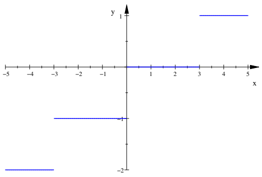


2.2.13

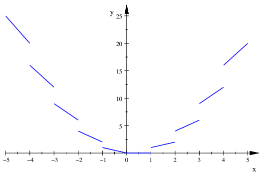
a)



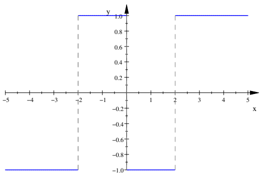
b)



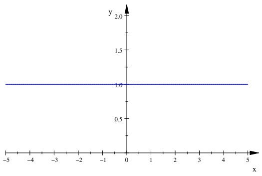
c)



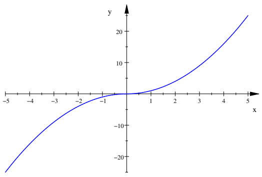
d)



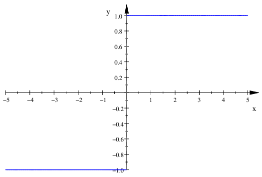
e)



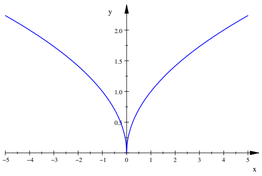
f)



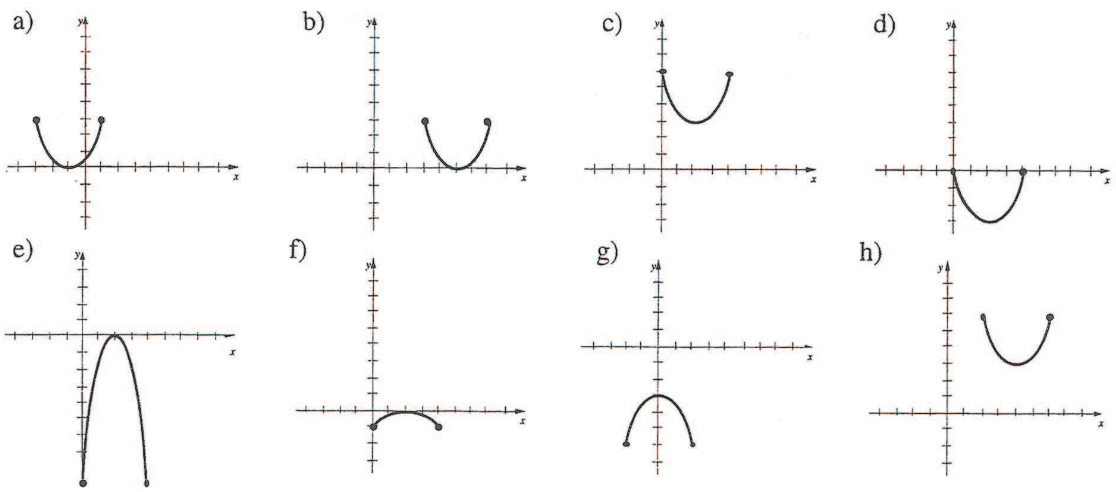
g)



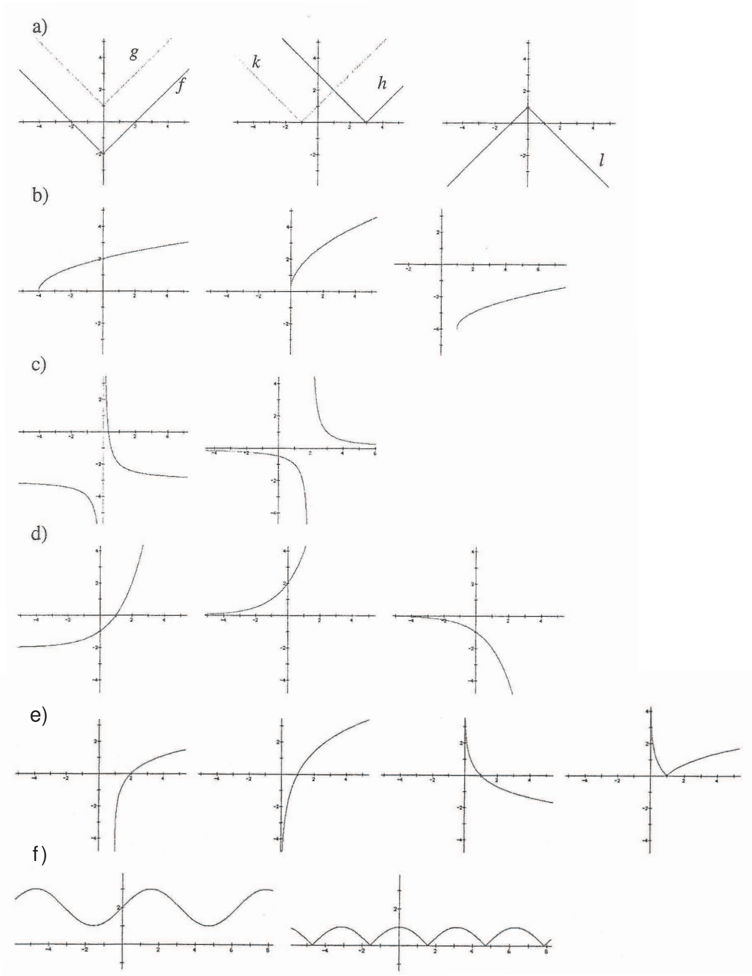
h)



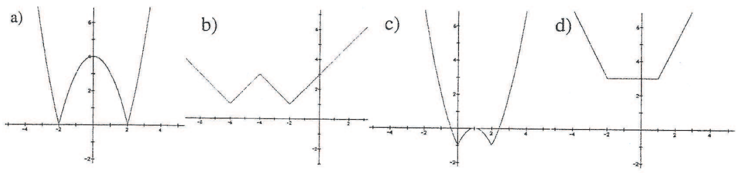
2.2.14



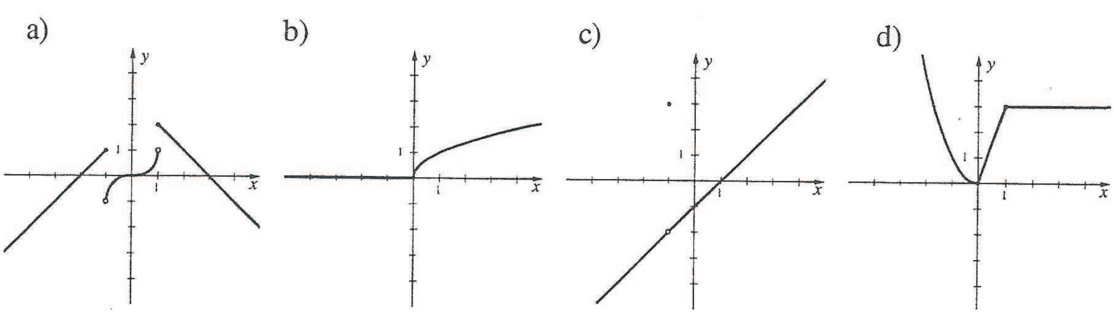
2.2.15



2.2.16



2.2.17



2.2.18 $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{3}{2}$.

2.2.19 a) paire ; b) impaire ; c) paire ; d) pas de parité ; e) impaire ; f) impaire ; g) paire ; h) pas de parité ; i) pas de parité ; j) paire ; k) paire ; l) impaire ; m) pas de parité ; n) paire.

2.2.20 a) $f+g$ paire, $f \cdot g$ paire, $f \circ g$ paire, $g \circ f$ paire ; b) $f+g$ impaire, $f \cdot g$ paire, $f \circ g$ impaire, $g \circ f$ impaire ; c) $f+g$ pas de parité, $f \cdot g$ impaire, $f \circ g$ paire, $g \circ f$ paire.

2.2.21 a) $2\,x\,h + h^2 + 2\,h$

b) $\dfrac{2\,h}{(x+h+3)(x+3)}$

c) $\sqrt{2\,x+2\,h-7} - \sqrt{2\,x-7}$

2.2.22 —

Fonctions injectives, surjectives et bijectives

2.3.1 a) f_1 : injective
b) f_2 : quelconque
c) f_3 : bijective
d) f_4 : injective
e) f_5 : bijective
f) f_6 : injective
g) f_7 : injective
h) f_8 : quelconque
i) f_9 : bijective
j) f_{10} : bijective
k) f_{11} : surjective
l) f_{12} : surjective
m) f_{13} : bijective
n) f_{14} : injective
o) f_{15} : bijective

2.3.2 a) $\begin{array}{rcccc} f_1 & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x \end{array}$

b) $\begin{array}{rcccc} {}^r f_2 & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x}{3} \end{array}$

c) $\begin{array}{rcccc} {}^r f_3 & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x-3}{2} \end{array}$

d) $\begin{array}{rcccc} {}^r f_4 & : & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}^* \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$

e) $\begin{array}{rcccc} {}^r f_5 & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt[3]{x} \end{array}$

f) $\begin{array}{rcccc} {}^r f_6 & : & \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ & & x & \mapsto & x+3 \end{array}$

g) $\begin{array}{rcccc} {}^r f_7 & : & \mathbb{R}-\{2\} & \to & \mathbb{R}-\{1\} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-2} \end{array}$

h) $\begin{array}{rcccc} {}^r f_8 & : & \mathbb{R}-\{1\} & \to & \mathbb{R}-\{1\} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}$

2.3.3 Par exemple :

a) $f\,:\,\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \;\;;\; {}^r f(x) = \sqrt{x}$

b) $f\,:\,\left[-\frac{1}{2}\,;\,+\infty\right[\to \left[-\frac{25}{4}\,;\,+\infty\right[\;\;;\; {}^r f(x) = -\frac{1}{2} + \sqrt{x + \dfrac{25}{4}}$

c) $f\,:\,[2\,;\,+\infty[\to]-\infty\,;\,4] \;\;;\; {}^r f(x) = 2 + \sqrt{4-x}$

d) $f\,:\,[0\,;\,\pi] \to [-1\,;\,1] \;\;;\; {}^r f(x) = \arccos(x)$

e) $f\,:\,\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} \;\;;\; {}^r f(x) = \arctan(x)$

f) $f\,:\,\left[-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\right] \to [-1\,;\,1] \;\;;\; {}^r f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{2}$

2.3.4 a) f n'est pas injective car $f(2) = \frac{4}{5} = f(\frac{1}{2})$.
f n'est pas surjective car $y = 2$ n'a pas d'antécédent : en effet l'équation $f(x) = 2$ devient $2x = 2(1 + x^2)$ soit $x^2 - x + 1 = 0$ qui n'a pas de solutions réelles.

b) $f(x) = y$ est équivalent à l'équation $yx^2 - 2x + y = 0$. Cette équation a des solutions x si et seulement si $\Delta = 4 - 4y^2 \geq 0$ donc il y a des solutions si et seulement si $y \in [-1, 1]$. Nous venons de montrer que $f(\mathbb{R})$ est exactement $[-1, 1]$.

c) Soit $y \in [-1, 1]$ alors les solutions x possibles de l'équation $g(x) = y$ sont $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ ou $x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y}$. La seule solution $x \in [-1, 1]$ est $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$ en effet $x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1, 1]$. Donc pour $g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$ nous avons trouvé un inverse $h : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$ défini par $h(y) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}$. Donc g est une bijection.

2.3.5 • f est injective :

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1 \\ &\Rightarrow x = \pm y \text{ où } x, y \in [\,1\,;\,+\infty\,[\text{ donc } x, y \text{ sont de même signe} \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

• f est surjective : soit $y \in [0, +\infty[$. Nous cherchons un élément $x \in [\,1\,;\,+\infty\,[$ tel que $y = f(x) = x^2 - 1$. Le réel $x = \sqrt{y+1}$ convient !

Limites de fonctions

2.4.1 a) b, b, b ; b) b, b, b ; c) b, $f(a)$, - ; d) b, c, -.

2.4.2 a) 2 ; b) 14 ; c) 0 ; d) -5 ; e) 2 ; f) $\dfrac{4}{3}$; g) -1 ; h) $\dfrac{1}{2}$.

2.4.3 a) $\dfrac{1}{2}$; b) 0 ; c) $\dfrac{1}{2}$; d) 2 ; e) $\dfrac{1}{4}$; f) $\dfrac{1}{2}$; g) $-\dfrac{1}{12}$; h) 0.

2.4.4 a) 8 ; b) $\dfrac{1}{10}$; c) $-\dfrac{1}{8}$; d) 2 ; e) 3 ; f) $\dfrac{1}{2}$; g) $-2\sqrt{3}$; h) $\dfrac{5}{3}$.

2.4.5 a) -1, 1, - ; b) 1, 1, 1 ; c) 2, -2, - ; d) -1, 1, -.

2.4.6 a) 0 ; b) 0.

2.4.7 0.

2.4.8 a) 2 ; b) 3/2 ; c) 1/20 ; d) 7/3 ; e) 1 ; f) 1 ; g) 1/2 ; h) -1.

2.4.9 -

2.4.10 a) $f(x) = \dfrac{3x-6}{x-2}$; b) $f(x) = \dfrac{7x+7}{x+1}$.

2.4.11 $\frac{1}{2}$.

2.4.12 $-\frac{1}{3}$.

2.4.13 A : 3), 6), 9) ; B : 5) ; C : 1), 4), 8) ; D : - (la courbe n'est pas le graphe d'une fonction).

2.4.14 a) $+\infty$; b) ∞ ; c) $-\infty$; d) $-\infty$; e) -1 ; f) 2 ; g) $+\infty$; h) $\frac{1}{4}$.

2.4.15 a) -2, $+\infty$, - ; b) 0, -, -.

2.4.16 a) $-\frac{2}{3}$; b) $+\infty$; c) 1 ; d) $-\frac{3}{10}$; e) 2 ; f) 3 ; g) $-\infty$; h) 0.

2.4.17 a) $+\infty$, $1/2$; b) -2, 2 ; c) -1, 1 ; d) 4, 0 ; e) $-\infty$, $+\infty$; f) 2, 2 ; g) 1, 1 ; h) 0, 0.

2.4.18 -

Continuité

2.5.1 Trou : $(-1; 1)$, AV : $x = 1$, saut : $x = 3$.

2.5.2 a) AV : $x = -2$; b) Trou $(-1; -1)$, AV : $x = 1$; c) - ; d) AV : $x = 0$ et $x = 5$; e) Saut : $x = -1$; f) Trou : $(0; 1)$.

2.5.3 a) $C_f = \mathbb{R} \setminus \{-1/2; 1/3\}$; b) $C_f = [-5; 5]$; c) $C_f = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$; d) $C_f = \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$; e) $C_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; f) $C_f = \mathbb{R}^*$.

2.5.4 -

2.5.5 a)

x		$\frac{4}{5}$		1		4	
$f(x)$	///	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$

; b)

x		-3		0		3	
$f(x)$	///	0	$-$	0	$+$	0	///

;

c)

x		-1		0	
$f(x)$	$+$	0	$+$	$\|$	$+$

d)

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

.

Asymptotes

2.6.1 a)

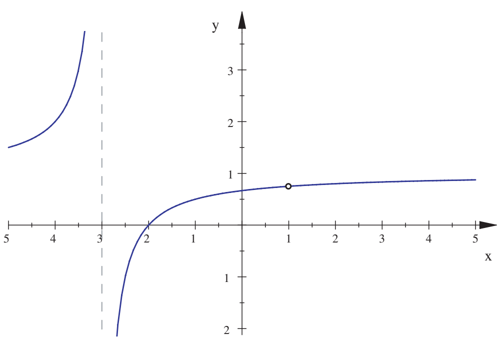
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$

AV : $x = -3$, Trou $\left(1; \frac{3}{4}\right)$,

AH : $y = 1$, pas d'AO

$\delta(x) = \dfrac{-x+1}{x^2+2x-3}$

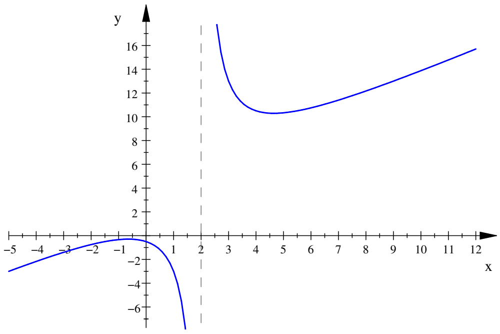
x		-3		1	
$\delta(x)$	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$-$



b)

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$
AV : $x = 2$,
pas d'AH, AO : $y = x + 3$
$\delta(x) = \dfrac{7}{x-2}$

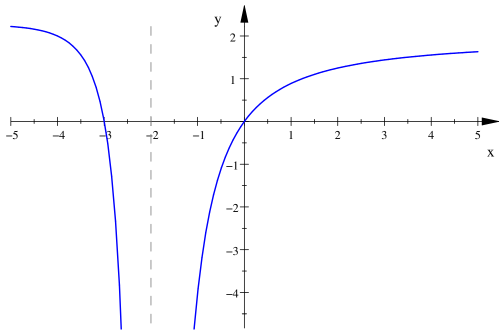
x		2	
$\delta(x)$	$-$	$\Vert$	$+$



c)

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$
AV : $x = -2$,
AH : $y = 2$, pas d'AO
$\delta(x) = \dfrac{-2x-8}{x^2+4x+4}$

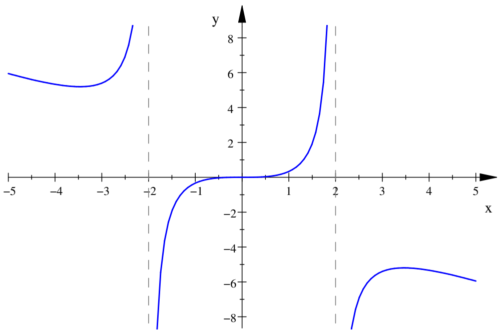
x		-4		-2	
$\delta(x)$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$



d)

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$
AV : $x = \ -2$, $x = 2$,
pas d'AH, AO : $y = -x$
$\delta(x) = \dfrac{4x}{-x^2+4}$

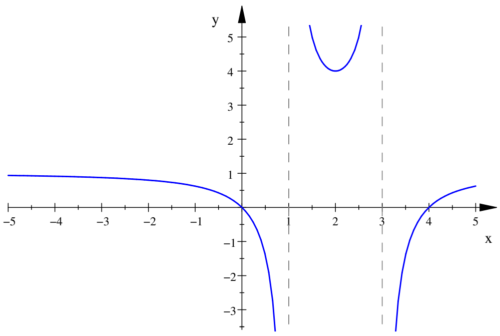
x		-2		0		2	
$\delta(x)$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$



e)

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{1; 3\}$
AV : $x = 1$, $x = 3$,
AH : $y = 1$, pas d'AO
$\delta(x) = \dfrac{-3}{x^2-4x+3}$

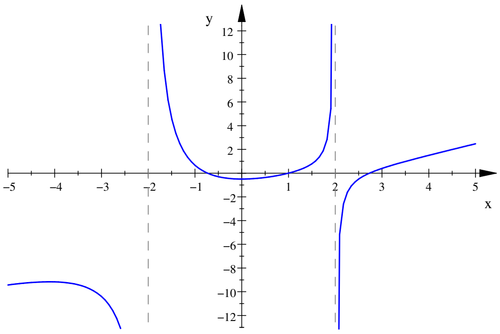
x		1		3	
$\delta(x)$	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$



f)

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$
AV : $x = -2$, $x = 2$,
pas d'AH, AO : $y = x - 3$
$\delta(x) = \dfrac{4x-10}{x^2-4}$

x		-2		2		$\frac{5}{2}$	
$\delta(x)$	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$



2.6.2 a) $D_f =]-\infty;-1[\cup[0;+\infty[$, AV : $x=-1$, pas d'AH, AO : $y = x - \dfrac{1}{2}$;
b) $D_f =]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[$, pas d'AV, AH : $y=0$ vers $-\infty$, AO : $y = 2x$ vers $+\infty$;
c) $D_f =]3;+\infty[$, AV : $x = 3$, AH : $y = 0$ vers $+\infty$;
d) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$, AV : $x=3$, AH : $y=0$;
e) $D_f =]-\infty;-\frac{3}{2}]\cup[0;+\infty[$, pas d'AV, AO : $y = 4x - \frac{3}{2}$ vers $-\infty$, AH : $y = -\frac{9}{2}$ vers $+\infty$;
f) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$, AV : $x=0$, AH : $y=3$ vers $-\infty$, AH : $y=0$ vers $+\infty$.

2.6.3 $f_1 \longleftrightarrow 3$; $f_2 \longleftrightarrow 9$; $f_3 \longleftrightarrow 7$; $f_4 \longleftrightarrow 10$; $f_5 \longleftrightarrow 4$; $f_6 \longleftrightarrow 12$; $f_7 \longleftrightarrow 1$; $f_8 \longleftrightarrow 6$; $f_9 \longleftrightarrow 5$; $f_{10} \longleftrightarrow 8$; $f_{11} \longleftrightarrow 11$; $f_{12} \longleftrightarrow 2$.

2.6.4 a) $f(x) = \dfrac{3x^2}{(x+4)(x-2)}$; b) $f(x) = 2x - 5 + \dfrac{1}{x-1}$.

2.6.5 $n = 0$: AV : $x=-3$, $x=3$, AH : $y=0$, pas d'AO ;
$n=1$: AV : $x = 3$, AH : $y=0$, pas d'AO ;
$n=2$: AV : $x=-3$, $x=3$, AH : $y=1$, pas d'AO ;
$n=3$: AV : $x=-3$, $x=3$, pas d'AH, AO : $y=x$,
$n>3$: AV : $x=-3$, $x=3$, pas d'AH, pas d'AO.

2.6.6 $a=1$, $b=-2$, $c=0$.

2.6.7 $a=1$, $b=-1$, $c=-3$.

2.6.8 $a=-2$, $b=-5$, $c=8$, $d=3$.

Dérivées

2.7.1 a) 3
b) Pentes : -2, 0, 4 et 2.
c) Tangentes : $y=-2x-1$, $y=0$, $y=4x-4$ et $y=2x-1$.

2.7.2 -1 et 2

2.7.3 a) $-1, 1, 2, 3$
b) $-0.3, 1.45, 2.6$
c) $1.1, 2.8$

d) $-0.4, 2.2$

2.7.4 a) -0.8 b) 2.4 c) 1.2 d) -2

2.7.5 a) $y = 2\,x - 5$
b) $y = 0$
c) $f'(2) = -1$
d) $y = -x + 4$

2.7.6 $y = -x + 6$

2.7.7 $f'(3) = -2$ et $f(3) = 1$

2.7.8 a) $f(5) = 29$ et $f(5 + h) = 29 + 10\,h + h^2$
b) $10 + 2\,h$
c) $f'(5) = 10$

2.7.9 a) $f(-2) = -6$ et $f(-2 + h) = h^2 - h - 6$
b) $h - 1$
c) $f'(-2) = -1$

2.7.10 a) C'est la vitesse d'accroissement du nombre de bactérie au temps $t = 5$, en nombre de bactéries par heure.
b) $f'(10) > f'(5)$

2.7.11 a) $f'(x) = 0$; b) $f'(x) = 2$; c) $f'(x) = 2x$; d) $f'(x) = -\dfrac{3}{(3x+1)^2}$;
e) $f'(x) = \dfrac{5}{(x+1)^2}$; f) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-3}}$.

2.7.12 a) $f'(x) = -2x + 1$; b) $f'(-1) = 3$, $f'(0) = 1$, $f'(2) = -3$.

2.7.13 a) non ; b) oui ; c) non ; d) non.

2.7.14 -

2.7.15 a) - ; b) non.

2.7.16 $f'(a) = -\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$, f est non dérivable en ± 1.

2.7.17 a) $f'(x) = 0$; b) $f'(x) = 3$; c) $f'(x) = 5x^4$; d) $f'(x) = 56x^6$; e) $f'(x) = 0$; f) $f'(x) = x^2$; g) $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$; h) $f'(x) = 28x^3 - 3$; i) $f'(x) = 2x + 5$; j) $f'(x) = 3x^2 + 10x - 2$; k) $f'(x) = 2x^2 - 5x + 2$; l) $f'(x) = 10x^4 - \dfrac{7}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}x - 1$.

2.7.18 a) $f'(x) = 2x - 2$; b) $f'(x) = 3x^2 + 5$; c) $f'(x) = -42x^2 + 86x - 26$;
d) $f'(x) = -12x^2 + 4x + 4$; e) $f'(x) = -\dfrac{5}{(2x-1)^2}$; f) $f'(x) = \dfrac{1}{(3-x)^2}$;
g) $f'(x) = -\dfrac{20x}{(2x^2-1)^2}$; h) $f'(x) = \dfrac{-2x^3 + 13x^2 - 20x}{(1-x)^2}$; i) $f'(x) = \dfrac{32x^2 - 40x + 8}{(4x^2-1)^2}$;
j) $f'(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2}$; k) $f'(x) = \dfrac{4-x}{x^3}$; l) $f'(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^2 + 4}{3x^2}$; m) $f'(x) = \dfrac{-4}{(x+1)^2}$;
n) $f'(x) = \dfrac{2(x^{-}1)}{x^2}$; o) $f'(x) = 2x + \frac{2}{3}$; p) $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1}})^2$.

2.7.19 a) $f'(x) = m$; b) $f'(x) = 3(w-1)x^2+w$; c) $f'(x) = 2ax+b$; d) $f'(x) = \dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$;
e) $f'(x) = \dfrac{t}{(x+t)^2}$; f) $f'(x) = \dfrac{ax^2+2ax}{(x^2+ax+a)^2}$.

2.7.20 a) $f'(x) = 8(2x+3)^3$; b) $f'(x) = -5(3-x)^4$; c) $f'(x) = 3(x^2+5x+1)^2(2x+5)$;
d) $f'(x) = 7(x^3-2x)^6(3x^2-2)$; e) $f'(x) = x(5x+2)^2(25x+4)$;
f) $f'(x) = -(2+x)(1-x)^2(4+5x)$; g) $f'(x) = 6(2x+5)^2(3x-1)^3(7x+9)$;
h) $f'(x) = (1-3x)(x+3)^2(18x^2-7x-33)$; i) $f'(x) = -\dfrac{4x}{(x^2+3)^3}$; j) $f'(x) = \dfrac{2-3x}{(3x+2)^3}$;
k) $f'(x) = -\dfrac{(1-x)^2(x+5)}{(1+x)^3}$; l) $f'(x) = \dfrac{(x-3)(x^2-3x+6)}{(x-2)^3}$.

2.7.21 a) $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; b) $f'(x) = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$; c) $f'(x) = \dfrac{4}{7\sqrt[7]{x^3}}$;
d) $f'(x) = \dfrac{16x-5}{2\sqrt{8x^2-5x+3}}$; e) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$; f) $f'(x) = 3\sqrt{4x^2-2x}(4x-1)$;
g) $f'(x) = \dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$; h) $f'(x) = \dfrac{-4x}{3\sqrt[3]{1-x^2}}$; i) $f'(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$;
j) $f'(x) = -\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}$; k) $f'(x) = \dfrac{1-3x}{2\sqrt{1-x}}$; l) $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{3x-2}\sqrt{(x+1)^3}}$.

2.7.22 a) $f'(x) = \cos(x) - 2\sin(x)$; b) $f'(x) = \tan^2(x)$; c) $f'(x) = -\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$;
d) $f'(x) = \dfrac{1}{1+\cos(x)}$; e) $f'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{(\cos(x)+3)^2}$; f) $f'(x) = \dfrac{2\cos(x)}{(1-\sin(x))^2}$;
g) $f'(x) = 2\cos(2x)$; h) $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$; i) $f'(x) = \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) - 12\sin\left(4x+\dfrac{\pi}{3}\right)$;
j) $f'(x) = \dfrac{3\cos(3x)\cos(5x)+5\sin(3x)\sin(5x)}{\cos^2(5x)}$; k) $f'(x) = 40\tan^4(8x)(1+\tan^2(8x))$;
l) $f'(x) = -\dfrac{1+\tan^2(2x)}{\sqrt{1-\tan(2x)}}$.

2.7.23 a) $f^{(n)}(x) = n!\; a_n$; b) $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

b) $$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{, si } n \equiv 0 \mod 4 \\ \cos(x) & \text{, si } n \equiv 1 \mod 4 \\ -\sin(x) & \text{, si } n \equiv 2 \mod 4 \\ -\cos(x) & \text{, si } n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$$

c) $$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-3)}{2^n(x+1)^{n-1/2}}$$

2.7.24 $a = 6$, $b = -12$, $c = 7$.

2.7.25 a) $y = -x+3$; b) $y = -\dfrac{1}{3}x+3$; c) $y = \dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$; d) $y = x$.

2.7.26 $P\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$.

2.7.27 $-\frac{4}{3}$, 2.

2.7.28 $P_1\left(-3; -\frac{1}{6}\right)$, $P_2\left(3; \frac{1}{6}\right)$.

2.7.29 $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$.

2.7.30 $m = -9/2$.

2.7.31 $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$ et $d = 1$.

2.7.32 $a = -2$, $b = -6$.

2.7.33 a) $y = 2x - 1$, $y = 18x - 81$; b) $y = 3x - 2$.

2.7.34 $(0; 0)$, $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$.

2.7.35 a) 0 et 8.13 ; b) 38.66 et 38.66 ; c) 36.87 et 71.57.

2.7.36 $a = -7$, $b = 10$.

2.7.37 $k = \frac{5}{2}$, $\left(1; \frac{7}{2}\right)$.

2.7.38 $a = 1$.

2.7.39 -

2.7.40 Non, car g n'est pas dérivable en $0 \in]-1; 1[$.

2.7.41 -

2.7.42 -

Applications de la dérivée

2.8.1 a) $-\dfrac{1}{3}$; b) $\dfrac{4}{9}$; c) 12 ; d) $-\dfrac{2}{3}$; e) $-\dfrac{9}{2}$; f) 6 ; g) -1 ; h) -2.

2.8.2 a)

x		-1		1	
$f(x)$	$\nearrow$	*Max*	$\searrow$	*Min*	$\nearrow$

, Max $(-1;2)$, Min $(1;-2)$;

b)

x		-1		0		1	
$f(x)$	$\nearrow$	*Max*	$\searrow$	*Min*	$\nearrow$	*Max*	$\searrow$

, Max $(-1;13)$, Min $(0;12)$, Max $(1;13)$;

c)

x		-2		1		3	
$f(x)$	$\nearrow$	*Plat*	$\nearrow$	*Max*	$\searrow$	*Min*	$\nearrow$

, Plat $(-2;0)$, Max $(1;108)$, Min $(3;0)$;

d)

x		-5	
$f(x)$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

;

e)

x		-5		-2		1	
$f(x)$	$\nearrow$	*Max*	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	*Min*	$\nearrow$

, Max $(-5;-12)$, Min $(1;0)$;

f)

x		-1		1	
$f(x)$	$\searrow$	*Min*	$\nearrow$	*Max*	$\searrow$

, Min $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$, Max $\left(1;\dfrac{1}{2}\right)$;

g)

x		$-\sqrt{6}$		-2		0		2		$\sqrt{6}$	
$f(x)$	///	0	$\nearrow$	*Max*	$\searrow$	*Min*	$\nearrow$	*Max*	$\searrow$	0	///

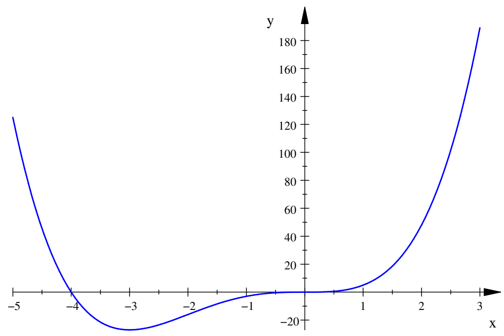
,
Min $(-\sqrt{6};0)$, Max $(-2;4\sqrt{2})$, Min $(0;0)$, Max $(2;4\sqrt{2})$, Min $(\sqrt{6};0)$;

h)

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$f(x)$		$\nearrow$	*Max*	$\searrow$	*Plat*	$\searrow$	*Min*	$\nearrow$	

, Max $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$, Plat $(\pi;0)$,
Min $\left(\dfrac{5\pi}{3};-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$.

2.8.3 Par exemple :



2.8.4 $\dfrac{1,000\,000\,000\,003}{1,000\,000\,000\,003^2+1} > \dfrac{1,000\,000\,000\,004}{1,000\,000\,000\,004^2+1}$

2.8.5 Après 2 h.

2.8.6 $k=-2$, minimum local en $(4;8)$.

2.8.7 a)

x	
$f(x)$	$\cup$

;

b)

x		0	
$f(x)$	$\cap$	PI	$\cup$

, PI $(0;8)$;

c)

x		1	
$f(x)$	$\cup$		$\cup$

;

d)

x		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
$f(x)$	$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$

, PI $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{3}{4}\right)$, PI $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{3}{4}\right)$;

e)

x		1	
$f(x)$	$\cap$	$\|$	$\cup$

;

f)

x		-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	
$f(x)$	$\cup$	$\|$	$\cap$	PI	$\cup$	PI	$\cap$

, PI $(0;-1)$, PI $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}};-\dfrac{1}{3}\right)$;

g)

x		-1		1	
$f(x)$	$///$	$\|$	$\cap$	$\|$	$///$

;

h)

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f(x)$		$\cap$	PI	$\cup$	PI	$\cap$	PI	$\cup$	PI	$\cap$	

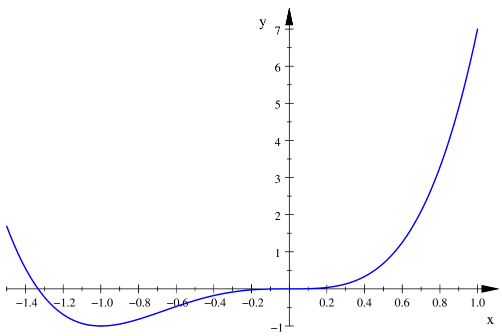
, PI $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{1}{2}\right)$, PI $\left(\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{1}{2}\right)$, PI $\left(\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{1}{2}\right)$, PI $\left(\dfrac{7\pi}{4};\dfrac{1}{2}\right)$.

2.8.8 $y=-3x+1$

2.8.9 $a=-8$, $b=18$, $c=0$.

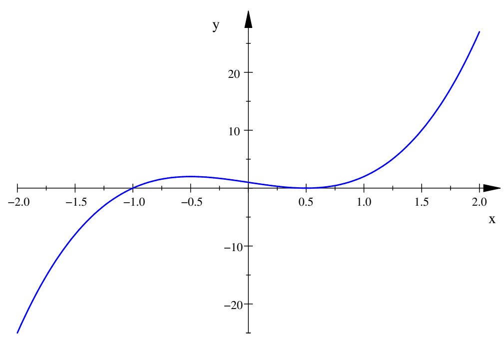
2.8.10 a)

$D_f=\mathbb{R}$
Pas de parité
Zéro : $x=-\dfrac{4}{3}$, $x=0$
Pas d'asymptote
$f'(x)=12x^3+12x^2$
Min $(-1;-1)$
$f''(x)=36x^2+24x$
PI$\left(-\dfrac{2}{3};-\dfrac{16}{27}\right)$, PI $(0;0)$



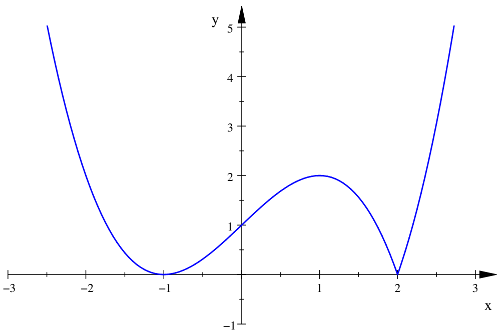
b)

$D_f=\mathbb{R}$
Pas de parité
Zéro : $x=-1$, $x=\dfrac{1}{2}$
Pas d'asymptote
$f'(x)=12x^2-3$
Max $\left(-\dfrac{1}{2};2\right)$, Min $\left(\dfrac{1}{2};0\right)$
$f''(x)=24x$
PI $(0;1)$



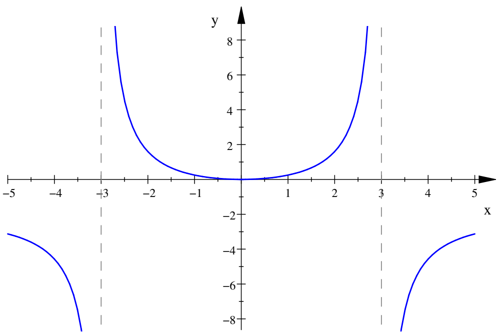
c)

$D_f = \mathbb{R}$
Pas de parité
Zéros : $x = -1$, $x = 2$
Pas d'asymptote
$f'(x) = \dfrac{3}{2}(x^2 - 1)\mathrm{sgn}(x - 2)$
Min $(-1; 0)$, Max $(1; 2)$, Min $(2; 0)$
$f''(x) = 3 \cdot x \cdot \mathrm{sgn}(x - 2)$
PI $(0; 1)$



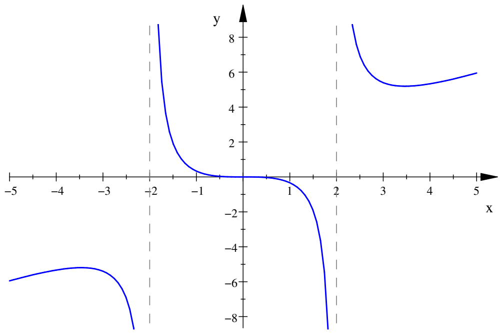
d)

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 3\}$
f paire
Zéro : $x = 0$
AV : $x = -3$, $x = 3$, AH : $y = -2$
$f'(x) = \dfrac{36x}{(9 - x^2)^2}$
Min $(0; 0)$
$f''(x) = \dfrac{108x^2 + 324}{(9 - x^2)^3}$



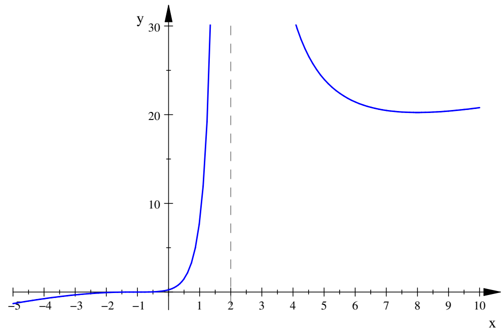
e)

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{\pm 2\}$
f impaire
Zéro : $x = 0$
AV : $x = -2$, $x = 2$, AO : $y = x$
$f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$
Max $(-2\sqrt{3}; -3\sqrt{3})$, Plat $(0;0)$,
Min $(2\sqrt{3}; 3\sqrt{3})$
$f''(x) = \dfrac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$
PI $(0;0)$



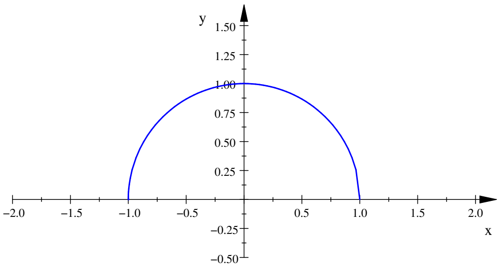
f)

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$
Pas de parité
Zéro : $x = -1$
AV : $x = 2$, AO : $y = x + 7$
$f'(x) = \dfrac{(x+1)^2(8-x)}{(2-x)^3}$
Plat $(-1;0)$, Min $\left(8; \dfrac{81}{4}\right)$
$f''(x) = \dfrac{54(x+1)}{(2-x)^4}$
PI $(-1;0)$



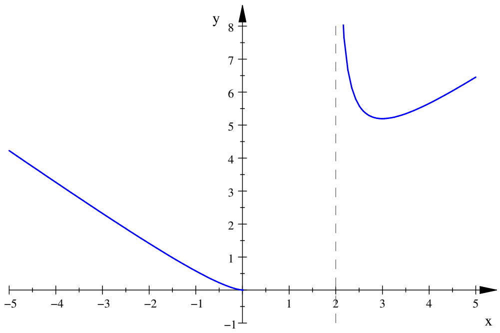
g)

$D_f = [-1;1]$
f paire
Zéro : $x = \pm 1$
Pas d'asymptote
$f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
Max $(0;1)$
$f''(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$



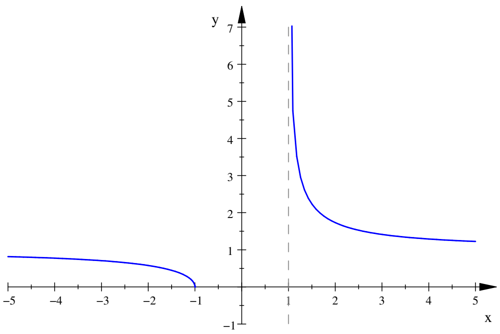
h)

$D_f =]-\infty; 0] \cup]2; +\infty[$
Pas de parité
Zéro : $x = 0$
AV : $x = 2$, AO : $y = \pm(x+1)$
$f'(x) = \dfrac{x^3-3x^2}{\sqrt{x^3(x-2)^3}}$
Min $(3; 3\sqrt{3})$
$f''(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x(x-2)^5}}$



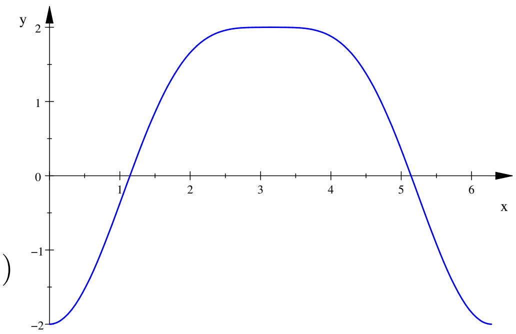
i)

$D_f =]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$
Pas de parité
Zéro : $x = -1$
AV : $x = 1$, AH : $y = 1$
$f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)(x-1)^3}}$
$f''(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{(x+1)^3(x-1)^5}}$



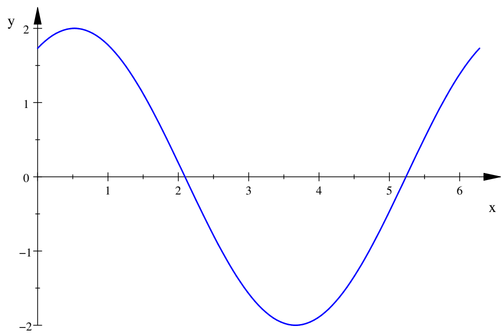
j)

$D_f = \mathbb{R}$
f paire
f périodique de période 2π,
donc étude sur $[0; 2\pi]$
Zéro : $x \cong 1,14$, $x \cong 5,14$
Pas d'asymptote
$f'(x) = 2\sin(x)(\cos(x)+1)$
Min $(0; -2)$, Max $(\pi; 2)$, Min $(2\pi; -2)$
$f''(x) = 4\cos^2(x) + 2\cos(x) - 2$
PI $(\pi/3; -1/4)$, PI $(5\pi/3; -1/4)$



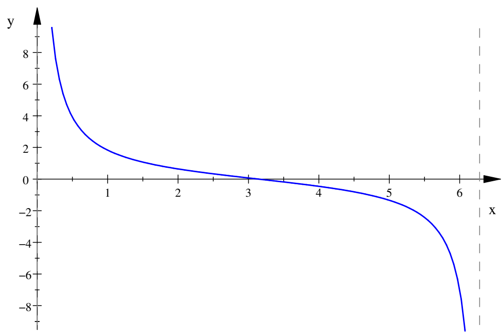
k)

$D_f = \mathbb{R}$
Pas de parité
f périodique de période 2π,
donc étude sur $[0; 2\pi]$
Zéro : $x = 2\pi/3$, $x = 5\pi/3$
Pas d'asymptote
$f'(x) = \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$
Max $(\pi/6; 2)$, Min $(7\pi/6; -2)$
$f''(x) = -\sin(x) - \sqrt{3}\cos(x)$
PI $(2\pi/3; 0)$, PI $(5\pi/3; 0)$



l)

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
f impaire
f périodique de période 2π,
donc étude sur $[0; 2\pi]$
Zéro : $x = \pi$
AV : $x = 0$, $x = 2\pi$
$f'(x) = -\dfrac{1}{1-\cos(x)}$
$f''(x) = \dfrac{\sin(x)}{(1-\cos(x))^2}$
PI $(\pi; 0)$



2.8.11 a) $D_f = \mathbb{R}$, f impaire, f non périodique,

x		0	
$f(x)$	$-$	0	$+$

, pas d'asymptote,

x		0	
$f(x)$	$\nearrow$	*Plat*	$\nearrow$

, Plat $(0;0)$,

x		0	
$f(x)$	$\cap$	*PI*	$\cup$

, PI $(0;0)$.

b) $D_f = \mathbb{R}$, pas de parité, f non périodique,

x		-2		0	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

,

pas d'asymptote,

x		$-1,5$		0	
$f(x)$	$\searrow$	*Min*	$\nearrow$	*Plat*	$\nearrow$

, Min $(-1,5;-1,8)$, Plat $(0;0)$,

x		-1		0	
$f(x)$	$\cup$	*PI*	$\cap$	*PI*	$\cup$

, PI $(-1;-1)$, PI $(0;0)$.

c) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$, f paire, f non périodique,

x		-2		0		2	
$f(x)$	$-$	$\|$	$+$	0	$+$	$\|$	$-$

,

AV : $x = -2$, $x = 2$, AH : $y = -2$,

x		-2		2	
$f(x)$	*Dessous*	$\|$	*Dessus*	$\|$	*Dessous*

,

x		-2		0		2	
$f(x)$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$	*Min*	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$

Min $(0;0)$,

x		-2		2	
$f(x)$	$\cap$	$\|$	$\cup$	$\|$	$\cap$

.

d) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, pas de parité, f non périodique,

x		0		2		3	
$f(x)$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$+$

,

AV : $x = 2$, AO : $y = x - 2$,

x		2		$2,7$	
$f(x)$	*Dessus*	$\|$	*Dessus*	*Coupe*	*Dessous*

,

x		2		3	
$f(x)$	$\nearrow$	$\|$	$\searrow$	*Min*	$\nearrow$

Min $(3;0)$,

x		2		4	
$f(x)$	$\cup$	$\|$	$\cup$	*PI*	$\cap$

, PI $(4;1)$.

2.8.12 Carré de côté 1 m.

2.8.13 Longueur : 32 cm, largeur : 16 cm.

2.8.14 Hauteur : 4 cm.

2.8.15 Rayon : $\sim$ 4,8 cm ; hauteur : $\sim$ 14,3 cm.

2.8.16 Longueur : 18 m, largeur : 16 m.

2.8.17 $y = -\dfrac{2}{3}x + 4$.

2.8.18 $M(2;\sqrt{3})$.

2.8.19 $M\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}};\dfrac{2}{3}\right)$.

2.8.20 $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

2.8.21 $\alpha = 0$.

2.8.22 13 h 48 min.

2.8.23 A 3 km du point B.

2.8.24 Côté base : 2 dm, hauteur : 3 dm.

2.8.25 Rayon : $\dfrac{8}{3}$ cm, hauteur : 4 cm.