Géométrie vectorielle II

Exercice 1

$\begin{vmatrix} -2m+8 & m-4 \\ -2 & 3m-5 \end{vmatrix} = (-2m+8)(3m-5)-(m-4)(-2) = -6m^2+34m-40+2m-8 =$
$-6m^2+36m-48 = 0$

$-6(m^2-6m+8) = 0 \quad \Rightarrow \quad -6(m-4)(m-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \{2;\ 4\}$

$\vec{a}$ colinéaire à $\vec{b}$ si $m \in \{2;\ 4\}$

vérifications :

1) $m = 2 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -2 \cdot \vec{b}$

$\Rightarrow \vec{a}$ colinéaire à $\vec{b}$

2) $m = 4 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = -\frac{7}{2} \cdot \vec{a}$

$\Rightarrow \vec{a}$ colinéaire à $\vec{b}$

Exercice 2

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1-6 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-5)^2+3^2} = \sqrt{34}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -2-6 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-8)^2+(-2)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-3)^2+-5^2} = \sqrt{34}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| \quad \Rightarrow$ le triangle ABC est isocèle en B

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (-5)\cdot(-3) + 3\cdot(-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow$ le triangle ABC est isocèle rectangle en B

b) $U\left(\dfrac{6+1-2}{3};\ \dfrac{3+6+1}{3}\right) \quad \Rightarrow U\left(\dfrac{5}{3};\ \dfrac{10}{3}\right)$

c) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ -5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 7-3 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DG} \Rightarrow DEFG$ possède une paire de côtés opposés parallèles et isométriques
$\Rightarrow DEFG$ est un parallélogramme

d) $\|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = \sqrt{25} = 5 \quad \Rightarrow \vec{u} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

e) $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} -7+9 \\ 6-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{OJ} - \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} -1+3 \\ 12-14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{KJ}$ $\Rightarrow$ $HIJK$ possède une paire de côtés opposés parallèles et isométriques

$\Rightarrow$ $HIJK$ est un parallélogramme

$\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} -9+3 \\ 8-14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{HI} = (-6) \cdot 2 + (-6) \cdot (-2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{KH} \perp \overrightarrow{HI}$

$\Rightarrow$ $HIJK$ est un parallélogramme avec un angle droit, c'est donc un rectangle

f) V est le point d'intersection des diagonales du rectangle $HIJK$, comme les diagonales d'un rectangle se coupent en leur point milieu : $V\left(\frac{-9-1}{2};\ \frac{8+12}{2}\right) \Rightarrow V(-5; 10)$

g) $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} -9+8 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -7+5 \\ -5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-6) - (-2) \cdot (-3) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{LM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{PN}$

$\Rightarrow$ $LMNP$ possède une paire de côtés parallèles, c'est donc un trapèze

$\overrightarrow{LP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} -5+8 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{LP} \cdot \overrightarrow{LM} = 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-3) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{LP} \perp \overrightarrow{LM}$

$\Rightarrow$ $HIJK$ est un trapèze avec un angle droit, c'est donc un trapèze rectangle

h) $\|\overrightarrow{LM}\| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$, $\|\overrightarrow{PN}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$\|\overrightarrow{LP}\| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ (hauteur du trapèze)

aire du trapèze rectangle $LMNP = \dfrac{(\sqrt{10} + 2\sqrt{10})}{2} \cdot \sqrt{10} = \dfrac{3\sqrt{10}}{2} \cdot \sqrt{10} = \dfrac{30}{2} = 15$

i) $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 8-12 \\ 10-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \|\overrightarrow{QR}\| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 8-8 \\ 5-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \|\overrightarrow{RS}\| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 12-8 \\ 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \|\overrightarrow{ST}\| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\overrightarrow{TQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 12-12 \\ 7-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \|\overrightarrow{TQ}\| = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = \sqrt{25} = 5$

$QRST$ possède quatre côtés isométriques, c'est donc un losange

j) périmètre du losange $QRST = 4 \cdot 5 = 20$

Exercice 3

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (4m-5)(4m+5) + (5m-2)(-3m-1) = 16m^2 - 25 - 15m^2 + m + 2 = m^2 + m - 23 = 0.$

$\Delta = 1 + 92 = 93 \Rightarrow \quad m = \dfrac{-1 \pm \sqrt{93}}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \left\{ \dfrac{-1 - \sqrt{93}}{2};\ \dfrac{-1 + \sqrt{93}}{2} \right\}$

Exercice 4

a) $ABCD$ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} -4+3 \\ 7-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}-1 \\ \\ \frac{7}{4}+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \\ \frac{35}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow D\left(\dfrac{3}{2};\ \dfrac{35}{4}\right)$

b) les diagonales d'un parallélogramme se coupent en peur point milieu $\Rightarrow I\left(\dfrac{-4+\frac{5}{2}}{2};\ \dfrac{7+\frac{7}{4}}{2}\right)$

$\Rightarrow I\left(-\dfrac{3}{4};\ \dfrac{35}{8}\right)$

c) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 7-6 \\ 9-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{FG}$ et $\|\overrightarrow{EF}\| = \|\overrightarrow{FG}\| \Rightarrow \overrightarrow{FG} = \pm\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ (*2 solutions*)

1) $\overrightarrow{FG_1} = \overrightarrow{OG_1} - \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FG_1} = \begin{pmatrix} 7-6 \\ 9+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow G_1\,(1;\ 10)$

$\overrightarrow{G_1H_1} = \overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{G_1H_1} = \overrightarrow{OH_1} - \overrightarrow{OG_1}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{G_1H_1} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 10-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow H_1\,(0;\ 4)$

2) $\overrightarrow{FG_2} = \overrightarrow{OG_2} - \overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OG_2} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FG_2} = \begin{pmatrix} 7+6 \\ 9-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow G_2\,(13;\ 8)$

$\overrightarrow{G_2H_2} = \overrightarrow{FE} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{G_2H_2} = \overrightarrow{OH_2} - \overrightarrow{OG_2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OG_2} + \overrightarrow{G_2H_2} = \begin{pmatrix} 13-1 \\ 8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow H_2\,(12;\ 2)$

d) $\|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{1^2+6^2} = \sqrt{37}$

$\Rightarrow$ aire du carré $ABCD = \left(\sqrt{37}\right)^2 = 37$

e) $L\left(\dfrac{5+10+k_1}{3};\ \dfrac{-9+2+k_2}{3}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{5+10+k_1}{3} = 8$ et $\dfrac{-9+2+k_2}{3} = -3$

$\Rightarrow k_1 = 3\cdot 8 - (5+10) = 9$ et $k_2 = 3\cdot(-3) - (-9+2) = -2$

$\Rightarrow K(9;\ -2)$

Exercice 5
Le bonnet d'âne !

$$A(-3;\ 4) \quad B(0;\ -2) \quad C(4;\ -2) \quad D(6;\ 4) \quad E(2;\ 0)$$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) - 2 \cdot (-4) = -2 \neq 0$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AE}$ n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{EC}$ et les points A, E, C ne sont pas alignés

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 2-6 \\ 0-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = (-4) \cdot (-2) - (-2) \cdot (-4) = 0$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{DE}$ est colinéaire à $\overrightarrow{EB}$ et les points D, E, B sont alignés