Combinatoire

Exercice 1.

arrangement des livres de mathématiques : $P_4 = 4! = 24$

arrangement des livres de physique : $P_3 = 3! = 6$

arrangement des livres de chimie : $P_2 = 2! = 2$

arrangement du livre de biologie : $P_1 = 1! = 1$

arrangement des 4 matières : $P_4 = 4! = 24$

$\Rightarrow P_4 \cdot P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot P_4 = 24 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 24 = \boxed{\text{6'912 dispositions différentes}}$

Exercice 2.

a) $A_7^7 = \dfrac{7!}{0!} = 7! = \boxed{\text{5'040 façons différentes}}$

b) en cercle, il faut laisser fixe 1 enfant et disposer (arrangement) les autres

$A_6^6 = \dfrac{6!}{0!} = 6! = \boxed{\text{720 façons différentes}}$

Exercice 3.

$P_9(3;2) = \dfrac{9!}{3! \cdot 2} = \boxed{\text{30'240 anagrammes}}$

Exercice 4.

au premier joueur : $C_9^{36} = \dfrac{36!}{27! \cdot 9!} = 94'143'280$

au deuxième joueur : $C_9^{27} = \dfrac{27!}{18! \cdot 9!} = 4'686'825$

au premier joueur : $C_9^{18} = \dfrac{18!}{9! \cdot 9!} = 48620$

au premier joueur : $C_9^{9} = \dfrac{9!}{0! \cdot 9!} = 1$

$\Rightarrow C_9^{36} \cdot C_9^{27} \cdot C_9^{18} \cdot C_9^{9} \cong \boxed{2{,}145 \cdot 10^{19} \text{ manières}}$

Exercice 5.

On place les 14 antennes non défectueuses, puis on place les antennes défectueuses entre deux antennes non défectueuses

comme il y a 15 intervalles entre les 14 antennes non défectueuses, on a :

$C_6^{15} = \dfrac{15!}{9! \cdot 6!} = \boxed{\text{5'005 configurations}}$

Exercice 6.

a) $C_2^{12} = \dfrac{12!}{10! \cdot 2!} = \boxed{66 \text{ choix}}$

b) un seul choix impossible $\Rightarrow 66 - 1 = \boxed{65 \text{ choix}}$

ou bien : $C_1^2 \cdot C_1^{10} + C_2^{10} = 20 + 45 = 65$

Exercice 7.

a) $A_5^{10} = \dfrac{10!}{5!} = \boxed{30\text{'}240 \text{ manières différentes}}$

b) on forme un seul siège avec les 5 personnes $\Rightarrow$ 6 sièges

nombre de possibilités de disposer les 6 sièges (dont 1 est occupé) : $P_6(5) = \dfrac{6!}{5!} = 6$

permutation de 5 personnes alignées : $P_5 = 5! = 120$

$\Rightarrow P_5(6) \cdot P_5 = 120 \cdot 6 = \boxed{720 \text{ manières différentes}}$

Exercice 8.

a) $C_4^{20} = \dfrac{20!}{16! \cdot 4!} = \boxed{4\text{'}845 \text{ résultats différents}}$

b) complément : aucune vraie paire

première chaussure : 20 possibilités

deuxième chaussure : 18 possibilités

troisième chaussure : 16 possibilités

quatrième chaussure : 14 possibilités

permutation de 4 objets : $P_4 = 4! = 24$

$\Rightarrow \dfrac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14}{4!} = 3360$

$\Rightarrow 4'845 - 3'360 = \boxed{1\text{'}485 \text{ résultats différents}}$

Exercice 9.

a) $C_5^{36} = \dfrac{36!}{31! \cdot 5!} = \boxed{\text{376'992 mains différentes}}$

b) 1) on forme une seule carte avec les 5 cartes $\Rightarrow$ 5 cartes (4+1 groupe)

nombre de possibilités pour les valeurs des 5 cartes : $P_5(4) = \dfrac{5!}{4!} = 5$

on a 4 cartes dans le jeu qui ont la même valeur $\Rightarrow \overline{A}_5^4 = 4^5 = 1'024$

$\Rightarrow 1'024 \cdot 5 = \boxed{\text{5'120 mains différentes}}$

2) $C_4^4 \cdot C_1^{32} = \dfrac{4!}{0! \cdot 4!} \cdot \dfrac{32!}{31! \cdot 1!} = \boxed{\text{32 mains différentes}}$

3) $C_1^1 \cdot C_4^{35} = \dfrac{1!}{0! \cdot 1!} \cdot \dfrac{35!}{31! \cdot 4!} = \boxed{\text{52'360 mains différentes}}$

4) $C_1^9 \cdot C_1^{32} = \dfrac{9!}{8! \cdot 1!} \cdot \dfrac{32!}{31! \cdot 1!} = \boxed{\text{288 mains différentes}}$

5) complément : aucune dame $\Rightarrow C_5^{32} = \dfrac{32!}{27! \cdot 5!} = 201'376$

$\Rightarrow 376'992 - 201'376 = \boxed{\text{175'616 mains différentes}}$

c) $A_5^{36} = \dfrac{36!}{31!} = \boxed{\text{45'239'040 mains différentes}}$