Généralités sur les fonctions

Exercice 1

a) pôles: $x = -1$ et $x = 8$ $\Rightarrow$ $ED(a) = \mathbb{R} - \{-1;\ 8\}$

b) $x^2 - 16 \geq 0$ (parabole convexe dont les zéros sont $x = -4$ et $x = 4$)

$\Rightarrow$ $ED(b) =]-\infty;\ -4] \cup [4;\ +\infty[$

c) pôle: aucun car le polynôme $x^2 - 2x + 6$ ne s'annule jamais ($\Delta = -20 < 0$)

$\Rightarrow$ $ED(c) = \mathbb{R}$

d) pôle: $x = 5$

$\dfrac{x+3}{-x+5} \geq 0$

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$-x+5$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$\dfrac{x+3}{-x+5}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

$\Rightarrow$ $ED(d) = [-3;\ 5[$

Exercice 2

a) $a(x) = x^2 - 7x - 30 = (x-10)(x+3)$ $\Rightarrow$ $ED(a) = \mathbb{R}$

x	$-\infty$		-3		10		$+\infty$
$x-10$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$a(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) $b(x) = \dfrac{\sqrt{-2x+7}}{\sqrt{x+5}} \qquad \Rightarrow \qquad ED(b) =]-5;\ \frac{7}{2}]$ (voir l'étude du signe)

x	$-\infty$		-5		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$\sqrt{-2x+7}$		$+$		$+$	0		
$\sqrt{x+5}$			0	$+$		$+$	
$b(x)$			$\|$	$+$	0		

c) $c(x) = \dfrac{(x-2)^{11}}{x^2-16x+64} = \dfrac{(x-2)^{11}}{(x-8)^2} \qquad \Rightarrow \qquad ED(c) = \mathbb{R} - \{8\}$

x	$-\infty$		2		8		$+\infty$
$(x-2)^{11}$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-8)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$c(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	

d) $d(x) = \sqrt{-x^2+100} = \sqrt{(-x+10)(x+10)} \Rightarrow \qquad ED(d) = [-10;\ 10]$ (voir l'étude du signe)

x	$-\infty$		-10		10		$+\infty$
$-x+10$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+10$		$-$	0	$+$		$+$	
$d(x)$			0	$+$	0		

e) $e(x) = 2cos(x) + \sqrt{3} \qquad$ étude sur l'intervalle: $[0;\ 2\pi]$

zéros: $2cos(x) + \sqrt{3} = 0 \qquad \Rightarrow cos(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ et $\quad x_2 = \dfrac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

x	0		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{7\pi}{6}$		2π
$e(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

f) $f(x) = \sqrt{3}tan(x) - 1$ étude sur l'intervalle: $[0;\ 2\pi]$

$tan(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x)}$ $\Rightarrow$ pôles: $cos(x) = 0$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ et $x_2 = \dfrac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

zéros: $\sqrt{3}tan(x) - 1 = 0$ $\Rightarrow tan(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + k \cdot \pi\ (k \in \mathbb{Z})$

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Exercice 3

a) $ED(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$ $ED(g) = \mathbb{R}_+^*$ $ED(h) = \mathbb{R}^*$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\dfrac{x}{x+3}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{\frac{x}{x+3}}} = \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}$

-3 et 0 ne sont pas dans l'ensemble de définition (division par $x+3$ avec f et division par x pour g) et il faut encore déterminer les valeurs de x lorsque $\dfrac{x+3}{x} > 0$

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+3}{x}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$\Rightarrow$ $ED(g \circ f) =]-\infty;\ -3[\cup]0;\ +\infty[$

c) $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}}\right) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2} - 4 = \dfrac{1}{\frac{1}{x}} - 4 = x - 4$

$\Rightarrow$ $ED(h \circ g) = ED(g) = \mathbb{R}_+^*$

Exercice 4

a) $f(4) = 4^3 - 7 \cdot (4^2) + 8 \cdot (4) + 16 = 64 - 112 + 32 + 16 = 0$

$f(x) - f(4) = x^3 - 7x^2 + 8x + 16 - 0 = x^3 - 7x^2 + 8x + 16$

ce polynôme se divise par $x - 4$! (car $f(4) = 0$)

schéma de Horner:

$$\begin{array}{cccc|c}
 & 1 & -7 & 8 & 16 \\
 & & + & + & + \\
\cdot 4 & & 4 & -12 & -16 \\
\hline
 & 1 & -3 & -4 & 0
\end{array}$$

$\Rightarrow \quad x^3 - 7x^2 + 8x + 16 = (x-4)(x^2 - 3x - 4) = (x-4)(x-4)(x+1)$

$\Rightarrow \quad f(x) - f(4) = (x-4)^2(x+1)$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$(x-4)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-f(4)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

$\Rightarrow \quad x = 4$ est un minimum local

b) $f(1) = -(1^2) + 2 \cdot 1 + 24 = -1 + 2 + 24 = 25$

$f(x) - f(1) = -x^2 + 2x + 24 - 25 = -x^2 + 2x - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -(x-1)^2$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-(x-1)^2$		$-$	0	$-$	
$f(x)-f(1)$		$-$	0	$-$	

$\Rightarrow \quad x = 1$ est un maximum global

Exercice 5

$$f(x)-g(x) = (x-1)^2 - \frac{11x-23}{x-3} = x^2-2x+1-\frac{11x-23}{x-3} = \frac{(x^2-2x+1)(x-3)-11x+23}{x-3}$$
$$= \frac{x^3-5x^2-4x+20}{x-3} = \frac{(x^2-4)(x-5)}{x-3} = \frac{(x-2)(x+2)(x-5)}{x-3}$$

x	$-\infty$		-2		2		3		5		$+\infty$
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

f et g se coupent aux points $(-2;9)$, $(2;1)$ et $(5;16)$

f est au-dessus de g si $x \in\ ]-\infty;-2[\cup]2;3[\cup]5;+\infty[$

f est au-dessous de g si $x \in]-2;2[\cup]3;5[$

Exercice 6

x	$-\infty$		-5		-2		4		$+\infty$
$a(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

$x = -3,5$ est un maximum global
$x = 1$ est un minimum local
$x = 4$ est un maximum local

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$b(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x = 2$ est un minimum global

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$c(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

la fonction c n'a pas d'extremum

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$d(x)$			0	$+$	0		

$x = 0$ est un maximum global

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$e(x)$		$+$	0	$-$	

la fonction e n'a pas d'extremum

x	$-\infty$		1		3		7		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$x = 2$ est un maximum local
$x = 4$ est un minimum local