Applications de la dérivée

Exercice 1

a) $f(x) = \sqrt{3-x}$ et $g(x) = 2x+4$

$\sqrt{3-x} = 2x+4 \qquad ED =]-\infty; 3]$

$2x+4 \geq 0 \qquad \Rightarrow x \geq -2 \qquad \Rightarrow S \subset [-2; 3]$

$3 - x = 4x^2 + 16x + 16$

$4x^2 + 17x + 13 = 0 \qquad \Rightarrow (4x+13)(x+1) = 0$

$x = -\dfrac{13}{4}$ sol. à éliminer car en dehors de $[-2; 3] \qquad \Rightarrow x = -1$

coordonnées du point d'intersection: $(-1; 2)$

$f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{3-x}} \qquad g'(x) = 2$

$f'(-1) = -\dfrac{1}{4} \qquad \Rightarrow m_1 = -\dfrac{1}{4} \qquad \Rightarrow \overrightarrow{v_{m_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$g'(-1) = 2 \qquad \Rightarrow m_2 = 2 \qquad \Rightarrow \overrightarrow{v_{m_2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow cos(\phi) = \frac{\overrightarrow{v_{m_1}} \cdot \overrightarrow{v_{m_2}}}{\|\overrightarrow{v_{m_1}}\| \cdot \|\overrightarrow{v_{m_2}}\|} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{4} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{85}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{85}}$$

$$\Rightarrow \phi = arccos\left(\frac{2}{\sqrt{85}}\right) \cong 77,47°$$

$\boxed{\Rightarrow 77,47° \text{ pour l'angle entre les courbes au point } (-1; 2)}$

b) $f(x) = \dfrac{x+5}{2}$ et $g(x) = x^2 - \dfrac{4}{x-3}$

$\dfrac{x+5}{2} = x^2 - \dfrac{4}{x-3} \qquad ED = \mathbb{R} - \{3\}$

$(x+5)(x-3) = 2x^2(x-3) - 2 \cdot 4$

$x^2 + 2x - 15 = 2x^3 - 6x^2 - 8$

$2x^3 - 7x^2 - 2x + 7 = 0 \qquad \Rightarrow 2x(x^2-1) - 7(x^2-1) = 0$

$(x^2-1)(2x-7) = 0 \qquad \Rightarrow (x-1)(x+1)(2x-7) = 0$

coordonnées des points d'intersection: $(-1; 2)$, $(1; 3)$ et $(\frac{7}{2}; \frac{17}{4})$

$f'(x) = \dfrac{1}{2} \qquad g'(x) = 2x + \dfrac{4}{(x-3)^2}$

$f'(-1) = \dfrac{1}{2} \qquad \Rightarrow m_1 = \dfrac{1}{2} \qquad \Rightarrow \overrightarrow{v_{m_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$g'(-1) = -\dfrac{7}{4} \qquad \Rightarrow m_2 = -\dfrac{7}{4} \qquad \Rightarrow \overrightarrow{v_{m_2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{7}{4} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow cos(\phi) = \frac{\overrightarrow{v_{m_1}} \cdot \overrightarrow{v_{m_2}}}{\|\overrightarrow{v_{m_1}}\| \cdot \|\overrightarrow{v_{m_2}}\|} = \frac{1-\frac{7}{8}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{65}}{4}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{325}}{8}} = \frac{1}{\sqrt{325}}$$

$$\Rightarrow \phi = arccos\left(\frac{1}{\sqrt{325}}\right) \cong 86,82°$$

$$\boxed{\Rightarrow 86,82° \text{ pour l'angle entre les courbes au point } (-1;2)}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \overrightarrow{v_{m_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$g'(1) = 3 \qquad \Rightarrow m_2 = 3 \qquad \Rightarrow \overrightarrow{v_{m_2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow cos(\phi) = \frac{\overrightarrow{v_{m_1}} \cdot \overrightarrow{v_{m_2}}}{\|\overrightarrow{v_{m_1}}\| \cdot \|\overrightarrow{v_{m_2}}\|} = \frac{1+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{10}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{50}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \phi = arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$$

$$\boxed{\Rightarrow 45° \text{ pour l'angle entre les courbes au point } (1;3)}$$

$$f'(\tfrac{7}{2}) = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \overrightarrow{v_{m_1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$g'(\tfrac{7}{2}) = 23 \qquad \Rightarrow m_2 = 23 \qquad \Rightarrow \overrightarrow{v_{m_2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow cos(\phi) = \frac{\overrightarrow{v_{m_1}} \cdot \overrightarrow{v_{m_2}}}{\|\overrightarrow{v_{m_1}}\| \cdot \|\overrightarrow{v_{m_2}}\|} = \frac{1+\frac{23}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{530}} = \frac{\frac{25}{2}}{\frac{\sqrt{2650}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{106}}$$

$$\Rightarrow \phi = arccos\left(\frac{5}{\sqrt{106}}\right) \cong 60,95°$$

$$\boxed{\Rightarrow 60,95° \text{ pour l'angle entre les courbes au point } (\tfrac{7}{2};\tfrac{17}{4})}$$

Exercice 2

a) $a'(x) = 3(x-3)^2(5-x)^2 - 2(x-3)^3(5-x) = (x-3)^2(5-x)[3(5-x) - 2(x-3)] = (x-3)^2(5-x)[15-3x-2x+6] = (x-3)^2(5-x)(-5x+21) = (x-3)^2(x-5)(5x-21)$

x	$-\infty$		3		$\frac{21}{5}$		5		$+\infty$
$(x-3)^2$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$5x-21$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$a'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
		$\nearrow$		$\nearrow$	MAX	$\searrow$	min	$\nearrow$	

$\boxed{a(x) \text{ est décroissante sur } I = [\frac{21}{5}; 5]}$

b) $b'(x) = \dfrac{(2x-3)(x^2-x-2)-(x^2-3x)(2x-1)}{(x^2-x-2)^2} = \dfrac{2x^3-5x^2-x+6-2x^3+7x^2-3x}{(x^2-x-2)^2} =$

$\dfrac{2x^2-4x+6}{(x^2-x-2)^2} = \dfrac{2(x^2-2x+3)}{(x^2-x-2)^2}$

$2(x^2-2x+3)$ n'a pas de zéro: expression toujours positive (parabole convexe)

$(x^2-x-2)^2$ est une expression toujours positive sur $ED(b') = \mathbb{R} - \{-1; 2\}$

par conséquent $b'(x)$ n'est jamais négative

$\boxed{b(x) \text{ n'est jamais décroissante}}$

c) $c'(x) = \dfrac{2x^3-(2x-1)(3x^2)}{x^6} = \dfrac{2x^3-6x^3+3x^2}{x^6} = \dfrac{-4x^3+3x^2}{x^6} = \dfrac{-4x+3}{x^4}$

$ED(c') = \mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$-4x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
x^4		$+$	0	$+$		$+$	
$c'(x)$		$+$	$\|$	$+$	0	$-$	
		$\nearrow$		$\nearrow$	MAX	$\searrow$	

$\boxed{c(x) \text{ est décroissante sur } I = [\frac{3}{4}; +\infty[}$

d) $d'(x) = \dfrac{2x-2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x-8)^2}} = \dfrac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{(x^2-2x-8)^2}}$

$ED(d') = \mathbb{R} - \{-2; 4\}$

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$2(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3\sqrt[3]{(x^2-2x-8)^2}$		$+$	0	$+$		$+$	0	$+$	
$d'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	
		$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$	

$\boxed{d(x) \text{ est décroissante sur } I =]-\infty; -2[\cup]-2; 1]}$

Exercice 3

$f'(x) = \dfrac{2x(x+k)-x^2}{(x+k)^2} = \dfrac{2x^2+2xk-x^2}{(x+k)^2} = \dfrac{x^2+2xk}{(x+k)^2} = \dfrac{x(x+2k)}{(x+k)^2}$

extremum: $x = 0$ ou $x = -2k$

$f(0) = 0$ et $f(-2k) = \dfrac{4k^2}{-k} = -4k$

$\Rightarrow -4k = 8$ $\quad \boxed{\Rightarrow k = -2}$

vérification: $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$ $\quad f'(x) = \dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
		$\nearrow$	MAX	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

maximum: $(0; 0)$ et minimum: $(4; 8)$

Exercice 4

a) $a(x) = \sqrt{4-x^2}$ $\qquad ED(a) = [-2;2]$

zéros de a: -2; 2

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$a(x)$		//////	0	$+$	0	//////	

pas d'asymptote

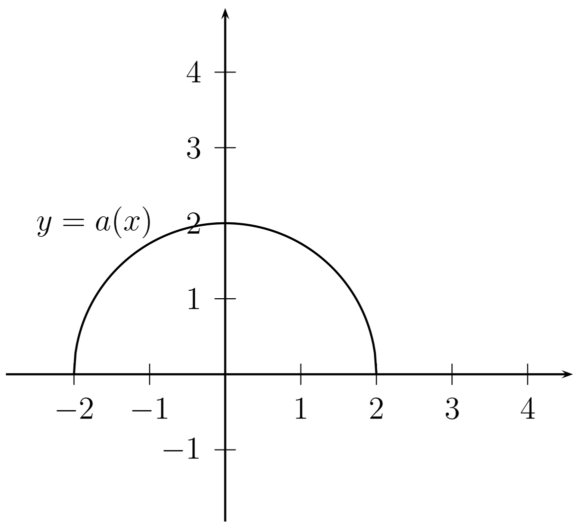
$a'(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$ $\qquad ED(a') =]-2;2[$

zéro de a': 0

pôles de a': -2; -2

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$a'(x)$		//////	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	//////	
				$\nearrow$	MAX	$\searrow$			

maximum: $(0;2)$



b) $b(x) = \dfrac{3x^2+7x+2}{1-x} = \dfrac{(3x+1)(x+2)}{1-x}$ $\qquad ED(b) = \mathbb{R} - \{1\}$

zéros de b: -2; $-\frac{1}{3}$

pôle de b: 1

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$b(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ <}} \dfrac{3x^2+7x+2}{1-x} = \dfrac{12}{\to 0^+} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \dfrac{3x^2+7x+2}{1-x} = \dfrac{12}{\to 0^-} = -\infty$

asymptote verticale: $x = 1$

$3x^2+7x+2 = (1-x)(-3x-10)+12$

asymptote oblique: $y = -3x-10$

$b'(x) = \dfrac{(6x+7)(1-x)+3x^2+7x+2}{(1-x)^2} = \dfrac{-6x^2-x+7+3x^2+7x+2}{(1-x)^2} = \dfrac{-3x^2+6x+9}{(1-x)^2} =$
$\dfrac{-3(x^2-2x-3)}{(1-x)^2} = \dfrac{-3(x-3)(x+1)}{(1-x)^2}$

$ED(b') = \mathbb{R} - \{1\}$

zéros de b': -1; 3

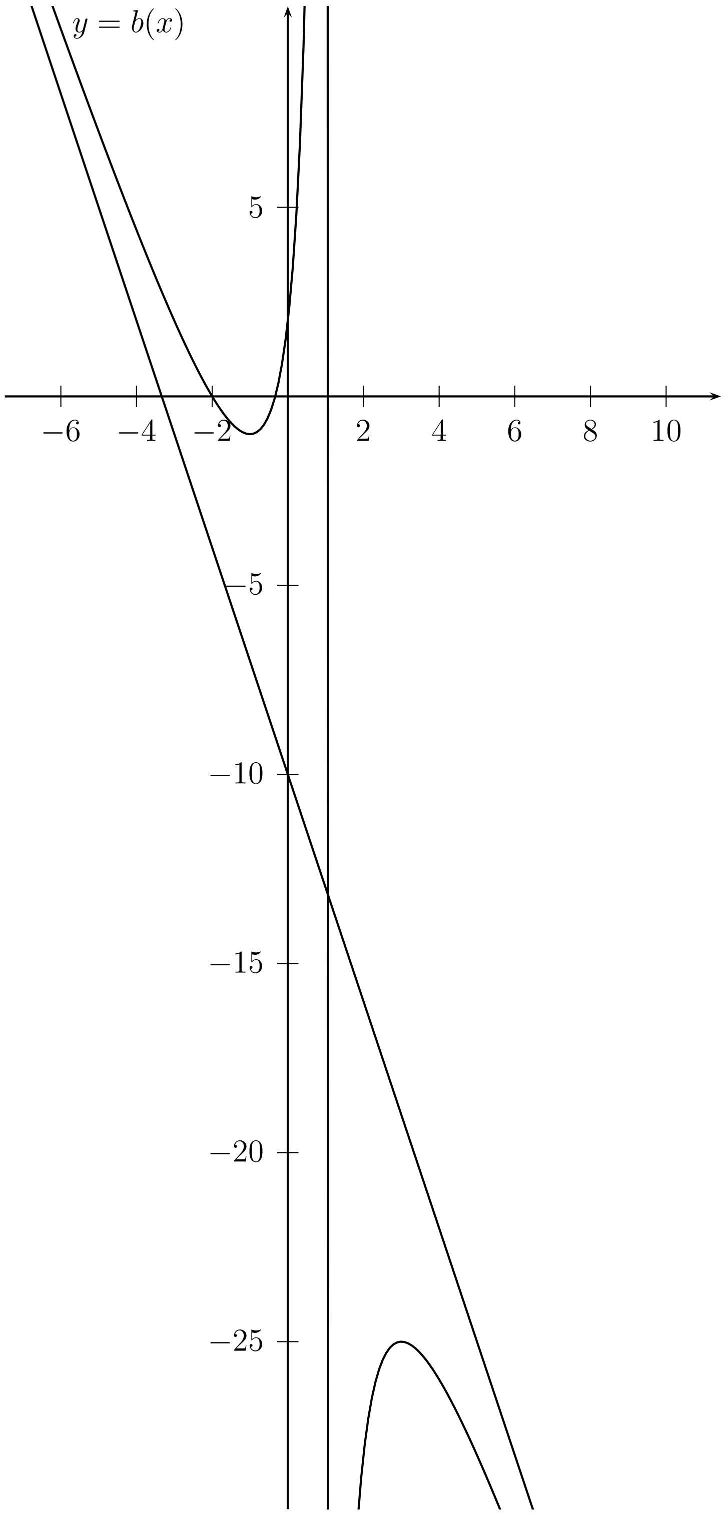
pôle de b': 1

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$b'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
		$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$	MAX	$\searrow$	

minimum: $(-1; -1)$

maximum: $(3; -25)$

autre point: $(0; 2)$


$y = b(x)$
5
−5
−10
−15
−20
−25
−6
−4
−2
2
4
6
8
10

c) $c(x) = \dfrac{4x+5}{x^2+9}$ $\qquad ED(c) = \mathbb{R}$

zéros de c: $-\frac{5}{4}$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		$+\infty$
$c(x)$		$-$	0	$+$	

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x+5}{x^2+9} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x} = 0$$

asymptote horizontale: $y = 0$

$$c'(x) = \frac{4(x^2+9) - 2x(4x+5)}{(x^2+9)^2} = \frac{4x^2+36-8x^2-10x}{(x^2+9)^2} = \frac{-4x^2-10x+36}{(x^2+9)^2} =$$
$$\frac{-2(2x^2+5x-18)}{(x^2+9)^2} = \frac{-2(2x+9)(x-2)}{(x^2+9)^2}$$

$ED(c') = \mathbb{R}$

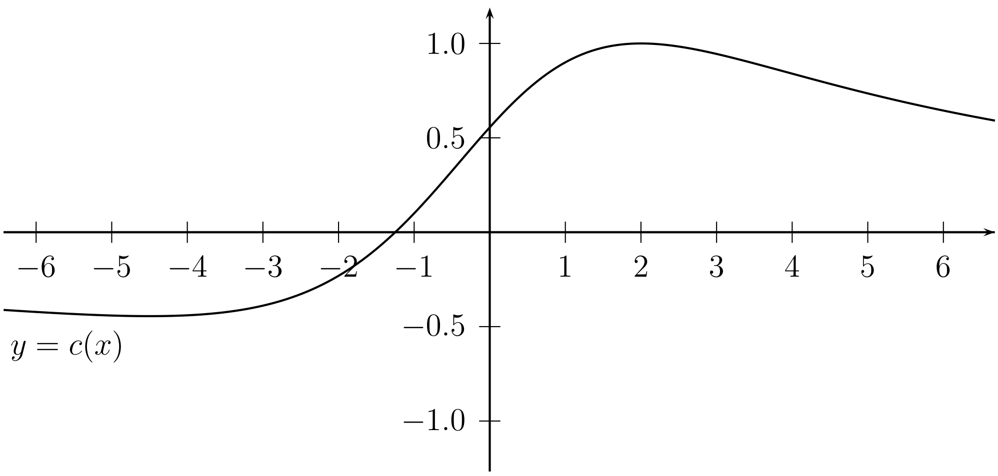
zéros de c': $-\frac{9}{2}$; 2

x	$-\infty$		$-\frac{9}{2}$		2		$+\infty$
$c'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
		$\searrow$	min	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	

minimum: $(-\frac{9}{2}; -\frac{4}{9})$

maximum: $(2; 1)$

autre point: $(0; \frac{5}{9})$



d) $d(x) = \dfrac{x^2+x-6}{x^2+7x+12} = \dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+4)}$ $\qquad ED(d) = \mathbb{R} - \{-4; -3\}$

zéros de d: 2

pôles de d: -4; -3

x	$-\infty$		-4		-3		2		$+\infty$
$d(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{\substack{x\to -4\\ <}} \dfrac{x^2+x-6}{x^2+7x+12} = \dfrac{6}{\to 0^+} = +\infty \qquad \lim\limits_{\substack{x\to -4\\ >}} \dfrac{x^2+x-6}{x^2+7x+12} = \dfrac{6}{\to 0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+x-6}{x^2+7x+12} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x-2}{x+4} = -5$ (trou dans la fonction)

asymptote verticale: $x = -4$

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^2+x-6}{x^2+7x+12} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

asymptote horizontale: $y = 1$

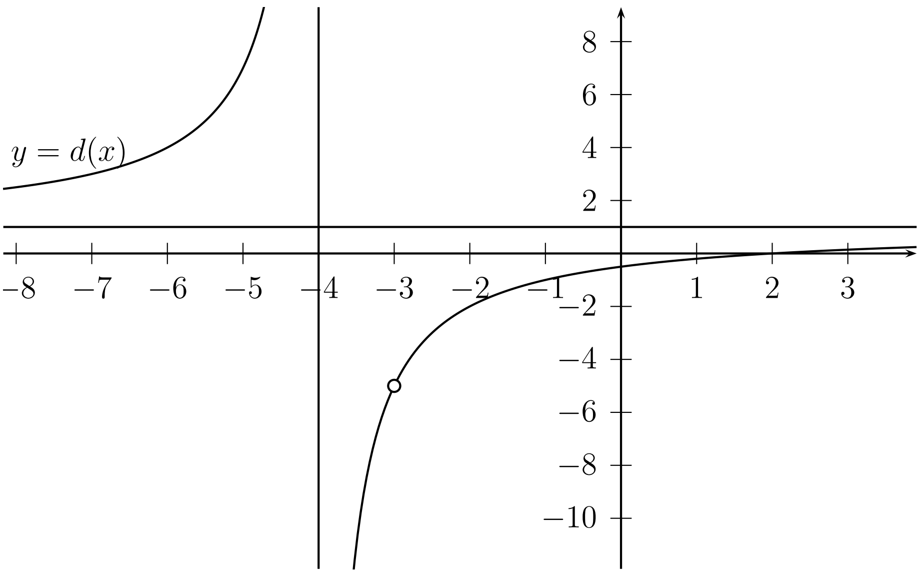
$d'(x) = \dfrac{(2x+1)(x^2+7x+12)-(2x+7)(x^2+x-6)}{(x^2+7x+12)^2} = \dfrac{6x^2+36x+54}{(x^2+7x+12)^2} = \dfrac{6(x^2+6x+9)}{(x^2+7x+12)^2} =$

$\dfrac{6(x+3)^2}{(x^2+7x+12)^2}$

$ED(d') = \mathbb{R} - \{-4; -3\}$

d': partout positif, donc pas d'extremum

autre point: $(0; -\frac{1}{2})$



Exercice 5

x: largeur du fond du bassin (en m) $4x$: largeur du fond du bassin (en m)

$\dfrac{200}{4x^2} = \dfrac{50}{x^2} =$ hauteur du bassin (en m)

aire des parois latérales: $10x \cdot \dfrac{50}{x^2} = \dfrac{500}{x}$ aire du fond du bassin: $4x^2$

coût du carrelage: $c(x) = 100 \cdot \dfrac{500}{x} + 50 \cdot 4x^2 = \dfrac{50'000}{x} + 200x^2$ $ED(c) =]0; +\infty[$

$c'(x) = -\dfrac{50'000}{x^2} + 400x = \dfrac{400x^3 - 50'000}{x^2} = \dfrac{400(x^3 - 125)}{x^2}$ $ED(c') =]0; +\infty[$

$x^3 - 125 = (x-5)(x^2+5x+25)$

zéro de c': 5 ($x^2 + 5x + 25$ n'a pas de solution car $\Delta = -75$) pôle de c': 0

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
$(x-5)(x^2+5x+25)$				$-$	0	$+$	
x^2			0	$+$		$+$	
$c'(x)$			$\parallel$	$-$	0	$+$	
				$\searrow$	min	$\nearrow$	

minimum: $(5; 15'000)$ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} c(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} c(x) = +\infty$

pour un coût minimal:

$\boxed{\text{il faut un bassin de largeur 5 m, de longueur 20 m et de 2 m de profondeur}}$

Exercice 6

1) $y = ax^2 + 1$

   $5 = 4a + 1$ $\Rightarrow a = 1$

   équation de la parabole: $\boxed{y = x^2 + 1}$

2) aire grisée: $a(x) = (2-x)(x^2+1) = -x^3 + 2x^2 - x + 2$ $ED(a) = [0; 2]$

   $a'(x) = -3x^2 + 4x - 1 = -(3x^2 - 4x + 1) = -(3x-1)(x-1)$ $ED(a') = [0; 2]$

   zéros de a': $\frac{1}{3}$; 1

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{3}$		1		2	$+\infty$
$-(3x-1)$			$+$	0	$-$		$-$		
$x-1$			$-$		$-$	0	$+$		
$a'(x)$			$-$	0	$+$	0	$-$		
			$\searrow$	min	$\nearrow$	MAX	$\searrow$		

maximum: $(1;2)$

$a(0) = 2$

$a(2) = 0$

$\boxed{\text{l'aire est maximale au point } S \text{ ou alors au point } P(1;2) \text{ et l'aire vaut } 2\ u^2}$

Exercice 7

x: largeur du rectangle (en cm)

$\sqrt{576-x^2}$ = longueur du rectangle (en cm)

aire du rectangle: $a(x) = x\sqrt{576-x^2}$ $\qquad ED(a) = [0;24]$

$$a'(x) = \sqrt{576-x^2} + \frac{x\cdot(-2x)}{2\sqrt{576-x^2}} = \sqrt{576-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{576-x^2}} = \frac{576-x^2-x^2}{\sqrt{576-x^2}} =$$

$$\frac{576-2x^2}{\sqrt{576-x^2}} = \frac{2(288-x^2)}{\sqrt{576-x^2}} = \frac{2(12\sqrt{2}-x)(12\sqrt{2}+x)}{\sqrt{576-x^2}}$$

$ED(a') = [0;24[$

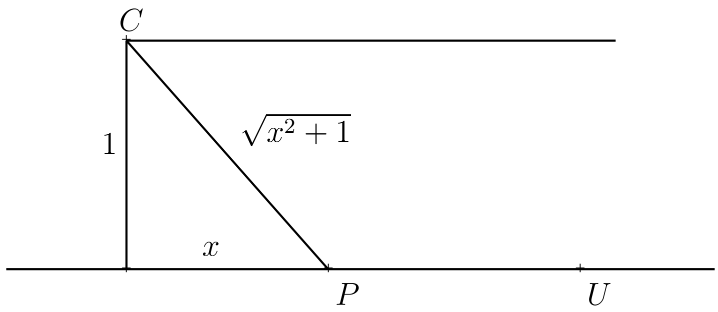
zéros de a': $12\sqrt{2}$ ($-12\sqrt{2}$ en dehors de $ED(a')$) $\qquad$ pôle de a': 24

x	$-\infty$	0		$12\sqrt{2}$		24	$+\infty$
$2(12\sqrt{2}-x)$			$+$	0	$-$		
$12\sqrt{2}+x$			$+$		$+$		
$\sqrt{576-x^2}$			$+$		$+$	0	
$a'(x)$			$+$	0	$-$	$\Vert$	
			$\nearrow$	MAX	$\searrow$		

maximum: $(12\sqrt{2};288)$ $\qquad a(0) = 0$ $\qquad a(24) = 0$

$\boxed{\text{l'aire est maximale lorsque c'est un carré de côté } 12\sqrt{2} \text{ cm et l'aire vaut } 288 \text{ cm}^2}$

Exercice 8



$C-P-U$: trajet de la ligne électrique $\qquad PU = 20-x$

coût de la ligne: $c(x) = 15\sqrt{x^2+1}+9(20-x) = 15\sqrt{x^2+1}+180-9x \qquad ED(c)=[0,20]$

$$c'(x) = \frac{15\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 9 = \frac{15x}{\sqrt{x^2+1}} - 9 = \frac{15x-9\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \qquad ED(c')=[0,20]$$

$15x-9\sqrt{x^2+1}=0 \qquad 15x = 9\sqrt{x^2+1}$

$225x^2 = 81(x^2+1) \qquad 225x^2 = 81x^2+81$

$144x^2-81=0 \qquad (12x-9)(12x+9)=0$

zéro de c': $\frac{3}{4}$ ($-\frac{3}{4}$ en dehors de $ED(c')$)

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{4}$		20		$+\infty$
$15x-9\sqrt{x^2+1}$				$-$	0	$+$			
$\sqrt{x^2+1}$				$+$		$+$			
$c'(x)$				$-$	0	$+$			
				$\searrow$	min	$\nearrow$			

minimum: $(\frac{3}{4}; 192)$ $\qquad c(0)=195 \qquad c(20)=300,375$

pour un coût minimal:

$\boxed{\text{il faut un trajet de 1,25 km au-dessus de l'eau et 19,25 km le long de la rive}}$