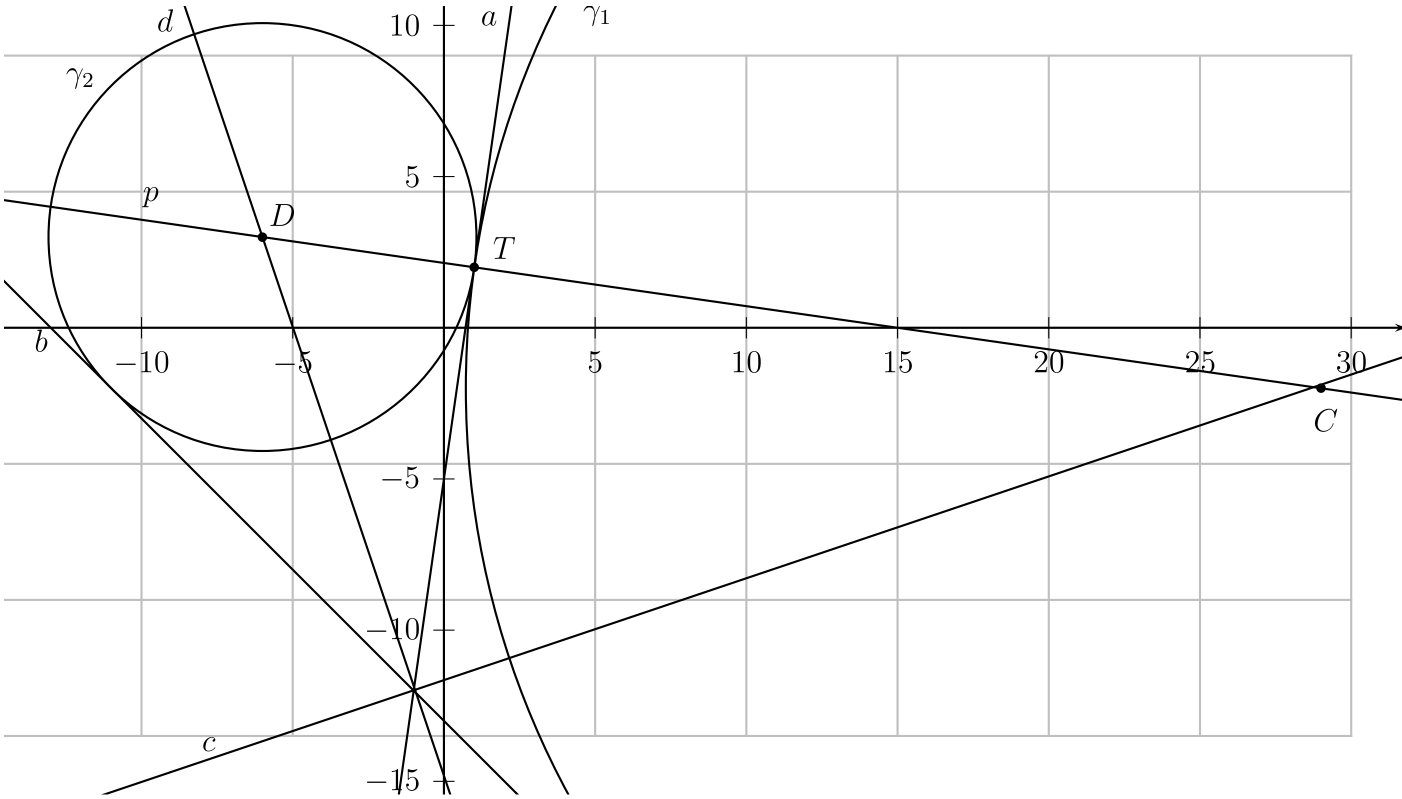
Géométrie analytique

Exercice 1



c et d bissectrices des droites a et b : $\dfrac{7x-y-5}{5\sqrt{2}} = \pm\dfrac{x+y+13}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 7x-y-5 = \pm(5x+5y+65) \qquad \Rightarrow (c):\ x-3y-35=0 \quad \text{et} \quad (d):\ 3x+y+15=0$

$T \in a$ (car $2 = 7\cdot 1 - 5$), soit p la droite perpendiculaire à a passant par le point T :

$x+7y+c=0 \qquad T\in p \qquad \Rightarrow 1+14+c=0 \qquad \Rightarrow c=-15 \quad \Rightarrow (p):\ x+7y-15=0$

intersection de p avec c :

$$\begin{cases} x-3y-35=0 \\ x+7y-15=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+3y+35=0 \\ x+7y-15=0 \end{cases} \Rightarrow 10y+20=0 \qquad \Rightarrow y=-2$$

$\Rightarrow x=29 \qquad \Rightarrow C(29;-2)$

intersection de p avec d :

$$\begin{cases} 3x+y+15=0 \\ x+7y-15=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y+15=0 \\ -3x-21y+45=0 \end{cases} \Rightarrow -20y+60=0 \qquad \Rightarrow y=3$$

$\Rightarrow x=-6 \qquad \Rightarrow D(-6;3)$

$\Rightarrow (\gamma_1):\ (x-29)^2+(y+2)^2=r_1^2 \qquad \text{et} \qquad (\gamma_2):\ (x+6)^2+(y-3)^2=r_2^2$

$\Rightarrow (1-29)^2+(2+2)^2=r_1^2 \qquad \text{et} \qquad (1+6)^2+(2-3)^2=r_2^2$

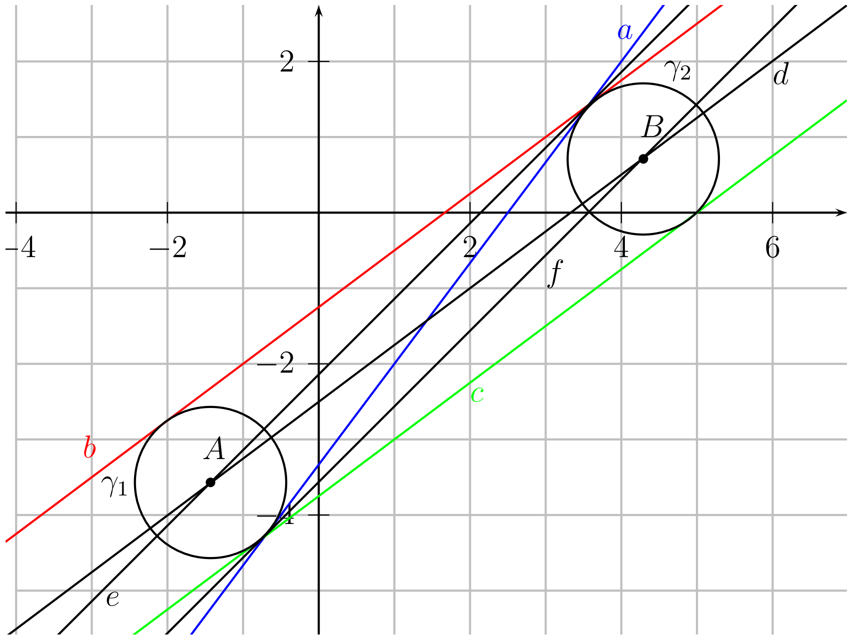
$\Rightarrow r_1^2=800 \quad \text{et} \quad r_2^2=50$

$\Rightarrow \boxed{(\gamma_1):\ (x-29)^2+(y+2)^2=800 \quad \text{et} \quad (\gamma_2):\ (x+6)^2+(y-3)^2=50}$

Exercice 2

Déterminer les équations des cercles tangents aux trois droites

$$(a):\ 3y = 4x - 10 \qquad (b):\ 3x = 4y + 5 \qquad (c):\ 3x - 4y = 15$$



les droites b et c sont parallèles, elles ont la même pente $\left(\frac{3}{4}\right)$

$\Rightarrow$ les centres des cercles sont situés sur la droite d parallèle et équidistante aux droite b et c dont la recherche se fait comme pour les bissectrices des droites concourantes

$\Rightarrow \dfrac{3x - 4y - 5}{5} = \pm\dfrac{3x - 4y - 15}{5}$

$+$: $\Rightarrow -5 = -15 \qquad \Rightarrow$ pas de sol.

$-$: $\Rightarrow 6x - 8y - 20 = 0 \qquad \Rightarrow (d):\ 3x - 4y - 10 = 0$

bissectrice e de pente positive des droites a et b : $\Rightarrow \dfrac{4x - 3y - 10}{5} = \pm\dfrac{3x - 4y - 5}{5}$

$+$: $\Rightarrow x + y - 5 = 0$ (pente négative)

$-$: $\Rightarrow 7x - 7y - 15 = 0$ (pente positive) $\Rightarrow (e):\ 7x - 7y - 15 = 0$

bissectrice f de pente positive des droites a et c : $\Rightarrow \dfrac{4x - 3y - 10}{5} = \pm\dfrac{3x - 4y - 15}{5}$

$+$: $\Rightarrow x + y + 5 = 0$ (pente négative)

$-$: $\Rightarrow 7x - 7y - 20 = 0$ (pente positive) $\Rightarrow (f):\ 7x - 7y - 25 = 0$

intersection de d et e : $\Rightarrow \begin{cases} 3x - 4y = 10 \\ 7x - 7y = 15 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} -21x + 28y = -70 \\ 21x - 21y = 45 \end{cases}$

$\Rightarrow 7y = -25 \qquad \Rightarrow y = -\dfrac{25}{7} \qquad \Rightarrow x = -\dfrac{10}{7} \qquad \Rightarrow A\left(-\dfrac{10}{7}; -\dfrac{25}{7}\right)$

intersection de d et f : $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x-4y=10 \\ 7x-7y=25 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -21x+28y=-70 \\ 21x-21y=75 \end{array}\right.$

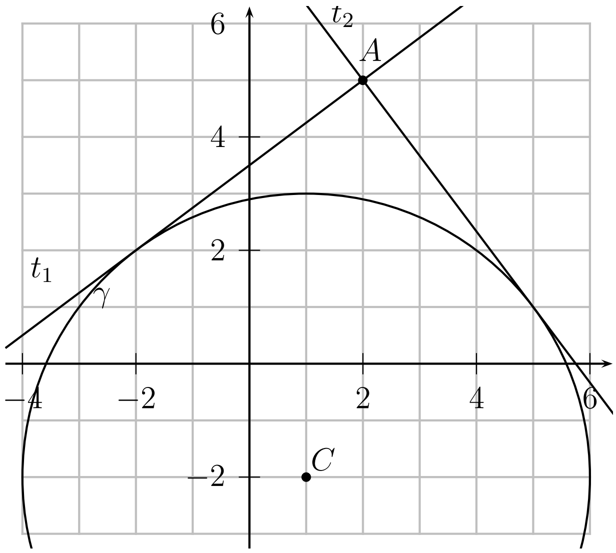
$\Rightarrow 7y=5 \qquad \Rightarrow y=\dfrac{5}{7} \qquad \Rightarrow x=\dfrac{30}{7} \qquad \Rightarrow B\left(\dfrac{30}{7};\dfrac{5}{7}\right)$

distance du point A à la droite b : $\dfrac{3\cdot(-\frac{10}{7})-4\cdot(-\frac{25}{7})-5}{5}=1$

$\Rightarrow \boxed{(\gamma_1):\ \left(x+\dfrac{10}{7}\right)^2+\left(y+\dfrac{25}{7}\right)^2=1 \quad \text{et} \quad (\gamma_2):\ \left(x-\dfrac{30}{7}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{7}\right)^2=1}$

Exercice 3

$(\gamma):\ x^2+y^2–2x+4y=20 \qquad A(2;5)$



$2^2+5^2-2\cdot2+4\cdot5=4+25-4+20=45\neq20 \qquad \Rightarrow A\notin\gamma$

$(\gamma):x^2-2x+1+y^2+4y+4-5=20 \qquad \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=25$

$\Rightarrow$ le centre du cercle $C(1;-2)$ et le rayon du cercle $r=5\ u$

famille des droites passant par le point A : $y=mx+h \qquad \Rightarrow 5=2m+h$

$\Rightarrow h=5-2m \qquad \Rightarrow y=mx+5-2m \qquad \Rightarrow (t):\ mx-y+5-2m=0$

la distance du point C à la droite t vaut 5 : $\dfrac{|m+2+5-2m|}{\sqrt{m^2+1}}=5$

$\Rightarrow -m+7=\pm5\sqrt{m^2+1} \qquad \Rightarrow m^2-14m+49=25m^2+25$

$\Rightarrow 24m^2+14m-24=0 \qquad \Rightarrow 12m^2+7m-12=0 \qquad \Rightarrow (4m-3)(3m+4)=0$

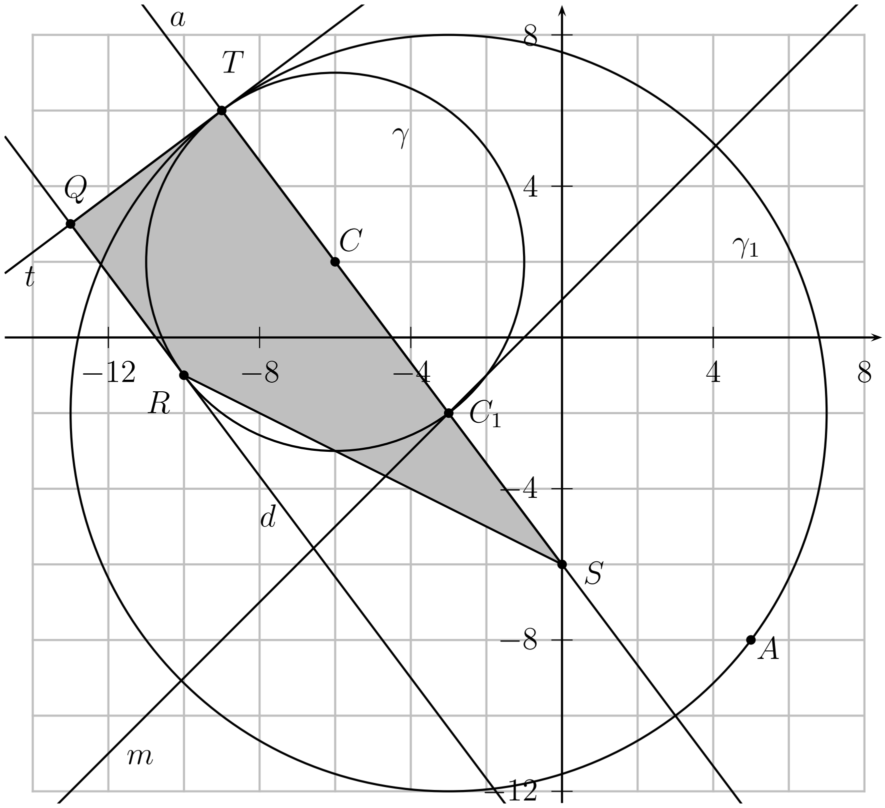
$\Rightarrow m_1=\dfrac{3}{4} \quad \text{et} \quad m_2=-\dfrac{4}{3} \qquad \Rightarrow h_1=\dfrac{7}{2} \quad \text{et} \quad h_2=\dfrac{23}{3}$

$\Rightarrow \boxed{(t_1):\ y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{7}{2} \quad \text{et} \quad (t_2):\ y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{23}{3}}$

Exercice 4

$$(\gamma): \; x^2 + y^2 + 12x - 4y + 15 = 0 \qquad (d): \; 4x + 3y + 43 = 0$$

$$T(-9;6) \qquad A(5;-8) \qquad Q(-13;3) \qquad S(0;-6)$$



a) $x^2 + 12x + 36 + y^2 - 4y + 4 - 40 + 15 = 0 \qquad \Rightarrow (x+6)^2 + (y-2)^2 = 25$

$\Rightarrow \boxed{C(-6;2) \qquad \text{et} \qquad r = 5\ u}$

b) $(-9)^2 + 6^2 + 12 \cdot (-9) - 4 \cdot 6 + 15 = 81 + 36 - 108 - 24 + 15 = 0$ ✓ $\quad \Rightarrow T \in \gamma$

$(t): \; (-9+6)(x+6) + (6-2)(y-2) = 25 \qquad \Rightarrow \boxed{(t): \; 3x - 4y + 51 = 0}$

c) intersection de d et γ : $\begin{cases} 4x + 3y + 43 = 0 \\ x^2 + y^2 + 12x - 4y + 15 = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{4}y - \frac{43}{4} \\ x^2 + y^2 + 12x - 4y + 15 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \left(-\frac{3}{4}y - \frac{43}{4}\right)^2 + y^2 + 12 \cdot \left(-\frac{3}{4}y - \frac{43}{4}\right) - 4y + 15 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{9}{16}y^2 + \frac{258}{16}y + \frac{1849}{16} + y^2 - 9y - 129 - 4y + 15 = 0$$

$\Rightarrow 25y^2 + 50y + 25 = 0 \qquad \Rightarrow 25(y+1)^2 = 0 \qquad \Rightarrow y = -1$ (1 sol.) $\Rightarrow d$ tangente à γ

$\boxed{\Rightarrow R(-10;-1)}$

d) $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -10+13 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{QT} = \begin{pmatrix} -9+13 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{TS} = \begin{pmatrix} 0+9 \\ -6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -12 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{TS} = 3 \cdot \overrightarrow{QR} \qquad \Rightarrow \overrightarrow{TS}$ colinéaire avec $\overrightarrow{QR} \qquad \Rightarrow TS$ parallèle à QR

$\Rightarrow QRST$ est un trapèze

$\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{QT} = 3 \cdot 4 + (-4) \cdot 3 = 0 \qquad \Rightarrow \overrightarrow{QR} \perp \overrightarrow{QT} \qquad \Rightarrow \sphericalangle RQT = 90^\circ$

$\Rightarrow QRST$ est un trapèze rectangle

$\overrightarrow{QS} = \begin{pmatrix} 0+13 \\ -6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -9 \end{pmatrix}$

aire de $QTS = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{QT}; \overrightarrow{QS})| = \dfrac{75}{2}\ u^2$

aire de $QSR = \frac{1}{2}|\det(\overrightarrow{QS}; \overrightarrow{QR})| = \dfrac{25}{2}\ u^2$

$\Rightarrow \boxed{\text{aire de } QRST = \dfrac{75}{2} + \dfrac{25}{2} = 50\ u^2}$

e) a droite perpendiculaire à t passant par le point T : $\Rightarrow (a):\ 4x + 3y + c = 0$

$T \in a \qquad \Rightarrow -36 + 18 + c = 0 \qquad \Rightarrow c = 18 \qquad \Rightarrow (a):\ 4x + 3y + 18 = 0$

M milieu de AT : $\Rightarrow M(-2; -1)$

droite passant par les points A et T : $m = \dfrac{-14}{14} = -1 \qquad \Rightarrow y = -x + h$

$\Rightarrow x + y - h = 0$

m médiatrice du segment AT : $\Rightarrow (m):\ x - y + c = 0$

$M \in m \qquad \Rightarrow -2 + 1 + c = 0 \qquad \Rightarrow c = 1 \qquad \Rightarrow (m):\ x - y + 1 = 0$

intersection de a et m : $\begin{cases} 4x + 3y = -18 \\ x - y = -1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y = -18 \\ 3x - 3y = -3 \end{cases}$

$\Rightarrow 7x = -21 \qquad \Rightarrow x = -3 \qquad \Rightarrow y = -2 \qquad \Rightarrow C_1(-3; -2)$

$\Rightarrow (\gamma_1):\ (x+3)^2 + (y+2)^2 = r^2$

$A \in \gamma_1 \qquad \Rightarrow (5+3)^2 + (-8+2)^2 = r^2 \qquad \Rightarrow r^2 = 100$

$\Rightarrow \boxed{(\gamma_1):\ (x+3)^2 + (y+2)^2 = 100}$