Chapitre 2

Algèbre

2.1 Développer une expression

2.1.1 Effectuer et réduire :

a) $3 + (xz + y^2)$

b) $3 - (xz + y^2)$

c) $3(xz + y^2)$

d) $(2a + b - c) + (3a - b + c)$

e) $(2a + b - c) - (3a - b + c)$

f) $(2a + b - c)(3a - b + c)$

g) $(x^3 - 2x^2 - 5) + (-4x^3 - 1)$

h) $(x^3 - 2x^2 - 5) - (-4x^3 - 1)$

i) $(x^3 - 2x^2 - 5)(-4x^3 - 1)$

j) $\left(u + \frac{v}{4}\right) + \left(\frac{3u}{4} - \frac{5v}{6}\right)$

k) $\left(u + \frac{v}{4}\right) - \left(\frac{3u}{4} - \frac{5v}{6}\right)$

l) $\left(u + \frac{v}{4}\right)\left(\frac{3u}{4} - \frac{5v}{6}\right)$

2.1.2 Effectuer et réduire :

a) $(a + b)^2$

b) $(a - b)^2$

c) $(a + b)(a - b)$

d) $(a + b)^3$

e) $(a - b)^3$

f) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

g) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

2.1.3 Effectuer et réduire :

a) $(a + 8)^2$

b) $(y^4 - 3b)^3$

c) $(u - 3)(u + 3)$

d) $(2m - 5n)(4m^2 + 10mn + 25n^2)$

e) $(7-f)^2$

f) $(4+2z^2)^3$

g) $(3+y^3)(y^6-3y^3+9)$

h) $(x^2+y^2)(x^2-y^2)$

i) $(t+3u^5)^3$

j) $(2x-7)^2$

k) $(b^2-c^3)(b^2c^3+b^4+c^6)$

l) $(a-3b)^3$

2.1.4 Réduire au maximum.

a) $(x-1)^2-(y+1)^2$

b) $(1+x)^2-(1-x)^2$

c) $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right)^2$

d) $(2x+y)^2+(2x-y)^2-2(2x+y)(2x-y)$

e) $(3x+y)(3x-y)-(3x+2y)^2-(x-3y)^2$

f) $(x+2)^2-(x+1)^2-(x+1)(x-1)-x(x+4)-4$

g) $(x+y)(x-y)+(x-y)^2-(x+y)^2+y(4x+y)$

h) $(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)-(x^2-2y^2)^2$

i) $(3x-2y)^2+(4x+y)(4x-y)-(5x-3y)^2+6y(y-3x)$

j) $(2x-y)^2(2x+y)^2-(x-2y)^2(x+2y)^2-15(x+y)(x-y)(x^2+y^2)$

2.1.5 Réduire au maximum.

a) $-(6ab^2-7x^3)(6ab^2+7x^3)$

b) $(4x^2-7y^3)^2-(x^2-5y^2)(4x^2+y^3)$

c) $(3x-2y)^2-(4x+5y)^2-2(2x-y)(3x-5y)$

d) $(2a-3b)^3-(2a-3b)^2-(2a-3b)$

2.1.6 Soit $p(x)=2x^3-3x^2+5x-1$ et $q(x)=3x^3+2x^2-4x+2$. Déterminer

a) le polynôme $p+q$

b) le degré du polynôme $p\cdot q$, ainsi que le coefficient de son terme de degré 4.

2.1.7 Soit $p(x)=x^2+x+2$ et $q(x)=x^3-2x$. Déterminer les polynômes

$$p+q, \quad p-q, \quad \text{et} \quad p\cdot q$$

2.1.8 Soit les polynômes

$a(x) = 3\,x^2 - 4\,x + 3$, $p(x) = x^4 + 2\,x^3 - 2\,x^2 - 4\,x + 17$ et $q(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 - 5\,x + 18$

a) calculer et réduire au maximum $(a(x))^2$
b) calculer $p - q$
c) déterminer le degré du polynôme $p \cdot q$
d) déterminer le coefficient du polynôme $p \cdot q$ de degré 7
e) déterminer le coefficient du polynôme $p \cdot q$ de degré 4

2.1.9 Effectuer et réduire.

a) $(2\,x - y - z) - (3\,x + 2\,y - 3\,z) - (4\,x + y - z) + (5\,x + 4\,y - 4\,z)$
b) $\left(\frac{1}{2}\,x^3 - \frac{1}{6}\,x^2y\right) - \left(x^3 - \frac{1}{8}xy^2 - \frac{1}{10}y^3\right) + \left(\frac{1}{2}\,x^3 - \frac{1}{2}\,x^2y + \frac{1}{8}\,xy^2 + \frac{1}{10}\,y^3\right)$ $- \left(-\frac{2}{3}\,x^2y - \frac{3}{4}xy^2 - \frac{4}{5}y^3\right)$
c) $x^2y - \{-[2xy^2 + 7x^3 + 5x^2y] + 4xy^2\} - 6x^2y$
d) $2\,xy + 3\,y^2 - \left\{-\frac{1}{2}\,x^2y + \left[\frac{1}{2}\,y^2 - \left(3\,xy + \frac{5}{4}\,x^2y\right)\right] - \left(\frac{1}{8}\,x^2y - 4\,y^2\right)\right\}$
e) $\left(\frac{1}{3}\,x^2\right)^3 - x^4 - \left\{\frac{3}{4}\,x^2y^2 - \left(\frac{1}{2}\,x^3\right)^2 + \left[(-2\,x)^4 + \frac{1}{4}\,x^2y^2 - \frac{8}{27}\,x^6\right]\right\}$
f) $(3\,x^2 - x + 2)(4\,x + 3)(2\,x - 1)$
g) $(x - 3)(x + 4)(x - 5)(x + 6)$
h) $x(x + 1) - 3\,x(-x + 3) + 2(x^2 - x)$
i) $[x(x + y) - y(x - y)]\,(x + y) - xy(x + y)$
j) $(x + y)(x - 2\,y)(2\,x - y) - (2\,x + y)(x - 2\,y)(x - y)$

2.1.10 Réduire.

a) $(x - 1)^3 - (x - 1)(x + 1)(x - 3)$
b) $(x + 1)(x - 1)^2 - (x - 2)^3$
c) $(x^2 + 2\,x + 1)^2 - 4\,x(x^2 + 1) - (x^2 + 1)(x^2 - 1)$
d) $(x + y)^3 - (x - y)^3 - (x^3 - y^3) - (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
e) $19(x^3 + y^3) - (3\,x - 2\,y)^3 - (3\,y - 2\,x)^3 - 18\,xy(x + y)$
f) $x^4 + y^4 + (x^2 + y^2 + 2\,xy)^2 - 2(x^2 + y^2 + xy)^2$
g) $(2\,x - 3\,y)^3 - 3\,y(x - 3\,y)^2 - 9\,xy(4\,y - x)$
h) $[(x - y)(x + y) + (2\,x - y)^2]^3$
i) $(x^3 + x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$
j) $[(x - y)(x - y)]^2 - (x^2 + y^2)^2 + 4\,xy\,[(x - y)^2 + xy + 1]$

2.2 Factoriser une expression

2.2.1 Factoriser :

a) $xy + y$

b) $ma + ap$

c) $a^3x^2 - a^2x^3$

d) $4uv - 2uw$

e) $6a^2 + 4ab$

f) $24y^3z^5 - 36yz^2$

g) $2yz^5 + 8y^2z^4 + 6y^3z^3 - 2y^4z^2$

h) $15m^7n^2 - 10m^5n^3$

i) $3a^2bc^2 - abc^3$

j) $(2a + 3b)(2x + y) + (3a + 5b)(2x + y)$

k) $3ab^4c^3 - ab^3c^2$

l) $2u^3v^2 + 8u^3v^3 - 6u^4v$

m) $(x - 3)(x + 1) + 2(x - 3)^2 - (x - 3)$

n) $(u + v)^3 - (u + v)^2$

o) $2a(a - b) - (a - b)^2$

2.2.2 Factoriser :

a) $a^2b^2 - m^2$

b) $x^4 - y^2$

c) $a^2 - \dfrac{1}{16}$

d) $(a + b)^2 - x^2$

e) $(ax + 2y)^2 - (2x - 3y)^2$

f) $(a - b)^2 - 1$

g) $3a^2 - 3$

h) $4x^5y^2 - 9x^3$

i) $a^4 - b^4$

j) $a^5 - a$

k) $\dfrac{u^4}{625} - \dfrac{v^4}{81}$

l) $x^5y^4 - x$

m) $a^2 + 2a + 1$

n) $1 + 2x^2 + x^4$

o) $a^4 + 9b^2 - 6a^2b$

p) $9x^4 + 16y^2 + 24x^2y$

q) $x^2 - x + \dfrac{1}{4}$

r) $\dfrac{xy}{3} + \dfrac{y^2}{9} + \dfrac{x^2}{4}$

s) $(a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2$

t) $5x^2 - 10x + 5$

u) $x^2(a + b) + 2(a + b)x + a + b$

2.2.3 Factoriser :

a) $x^{12} - 125$

b) $a^4 - \dfrac{8ab^3}{27}$

c) $27c^3 + \dfrac{1}{64}$

d) $z^3 + 8a^3b^6$

e) $z^6 + 27$

f) $z^3 - 6z^2 + 12z - 8$

g) $1 + 9a + 27a^2 + 27a^3$

h) $x^3 + x^2y + \dfrac{xy^2}{3} + \dfrac{y^3}{27}$

i) $12a^3 + \dfrac{9ab^2}{4} + \dfrac{3b^3}{16} + 9a^2b$

2.2.4 Factoriser :

a) $x^2 + 5x + 6$

b) $x^2 + 5x + 4$

c) $u^2 - 6u + 8$

d) $x^2 - 2x - 35$

e) $9x^2 + 6x + 1$

f) $4z^2 + 5z + 1$

g) $x^2 - 2x - 80$

h) $3y^2 + 7y + 3$

i) $6x^2 + 5x + 1$

j) $x^2 - 22x + 85$

k) $x^2 + x + 1$

l) $16u^2 - 72u + 81$

m) $40x^2 + 3x - 28$

n) $a^2 + 9a - 10$

o) $2x^2 - 5x - 2$

p) $4m^2 + 25m - 21$

2.2.5 Factoriser :

a) $x^4 - 13x^2 + 36$

b) $a^6 + 19a^3 - 216$

c) $x^8 - 257x^4 + 256$

d) $7x^4 - 61x^2 - 18$

e) $64x^6 - 91x^3 + 27$

f) $6x^4 + 7x^2 - 3$

g) $16x^8 - 641x^4 + 625$

h) $81z^4 + 80z^2 - 1$

2.2.6 Factoriser :

a) $ax + bx + ay + by$

b) $a + b + ax + bx + ay + by$

c) $ax - bx - ay + by$

d) $ax - 4x + 4y - ay$

e) $ax + x - a - 1$

f) $x^3 + x - x^2 - 1$

g) $\dfrac{xy}{2} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{yz}{3} - \dfrac{z}{6}$

h) $10xz - 10z - x^2 + x$

i) $a^2 - 2ab + b^2 - 1$

j) $4x^2 + 2x - 9y^2 - 3y$

k) $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$

l) $8y^4 - 8y^3 + y - 1$

m) $x^3 + x - x^2 - 1$

n) $2a^4 - 3 - 2a^3 + 3a$

o) $6x^2 + xy + 18xz + 3yz$

2.2.7 Décomposer en facteurs après avoir groupé.

a) $x - 2\,y - x^2 + 2\,xy + (x - 2\,y)^2$

b) $2\,x^2 + 3\,x - 10\,xy - 15\,y$

c) $3\,x^3 - 20\,y^2z - 5\,z + 12\,x^3y^2$

d) $8\,x + (2\,x + 3\,y)(x - 2\,y) - 6\,x^2 + 12\,y - 9\,xy + (2\,x + 3\,y)^2$

e) $\dfrac{xz}{2} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{yz}{3} - \dfrac{y}{6}$

f) $x^5 - \frac{4}{5}\,x^2y - \frac{5}{4}\,x^3z + yz$

g) $\frac{2}{9}\,x^2y^3 - \frac{1}{20}\,x^2 + \frac{40}{27}\,y^3 - \frac{1}{3}$

h) $3\,x^4y^3z + x^4y^3 + 3x^3y^4z - 3\,x^2y^5z - x^2y^5$

i) $x^{3m+2} - 2\,x^{m+2}y^m + x^{2m}y^{m+3} - 2\,y^{2m+3}$ avec $m \in \mathbb{N}^\star$

j) $x^{3m+1} - x^{2m+1}y^{2n} + 2\,x^my^{3n} - 2\,y^{5n}$ avec $m, n \in \mathbb{N}^\star$

2.3 Division euclidienne

2.3.1 Effectuer la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ dans chacun des cas suivants et poser l'égalité fondamentale correspondante :

a) $A(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - 5$ $B(x) = x - 5$

b) $A(x) = x^5 - x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 1$ $B(x) = x^2 + 2x - 1$

c) $A(x) = x^4 - 3x^3 + x - 5$ $B(x) = x^2 - 3$

d) $A(x) = 35x^3 + 47x^2 + 13x + 1$ $B(x) = 5x + 1$

e) $A(x) = x^8 + x^4 + 1$ $B(x) = x^2 - x + 1$

f) $A(x) = x^7 - 4x^6 + 2x^5 + x^4 - 3x^2 + 2x - 6$ $B(x) = x^5 - 3$

g) $A(x) = x^8 - x^4 + 1$ $B(x) = 2x^5 + 1$

h) $A(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 + 5x$ $B(x) = x + 2$

i) $A(x) = \frac{2}{5}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x$ $B(x) = -\frac{3}{5}x$

j) $A(x) = 3x + 2x^2 - 5 + x^3$ $B(x) = -1 + x^2 - 2x$

2.3.2 Effectuer la division euclidienne du polynôme $a(x)$ par le polynôme $b(x)$.

a) $a(x) = 3\,x^4 - 7\,x^3 - 18\,x^2 + 28\,x + 24$ et $b(x) = 3\,x^2 + 8\,x + 4$

b) $a(x) = 12\,x^4 + 47\,x^3 + 10\,x^2 + 12$ et $b(x) = -3\,x^2 - 8\,x + 6$

c) $a(x) = x^5 - 3\,x^2 + x + 5$ et $b(x) = -\,x^2 + x - 1$

2.3.3 Par quel polynôme faut-il multiplier $x - 5$ pour obtenir $x^3 - 3\,x^2 - 4\,x - 30$?

2.3.4 Déterminer le polynôme tel que le quotient de sa division euclidienne par $2\,x^2 + 1$ soit $5\,x^2 - 3\,x + 1$ et le reste $1 - x$.

2.3.5 Calculer la valeur numérique $P(a)$ du polynôme $P(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 + 5\,x - 7$ pour chacune des valeurs a suivantes : 1, 3, 0, -2, -3, $1/3$ et $-1/2$.

2.3.6 Effectuer la division euclidienne de $t^5 - 7\,t^4 - t^2 - 9\,t + 9$ par $t^2 - 5\,t + 4$.

2.3.7 Trouver un polynôme P de degré ≤ 2 tel que

$$P(1) = -2 \quad \text{et} \quad P(-2) = 3 \quad \text{et} \quad P(0) = -1$$

2.3.8 Calculer le reste de la division euclidienne du polynôme $a(x)$ par le polynôme $b(x)$.

a) $a(x) = 4\,x^3 - 10\,x^2 + 11\,x - 5$ et $b(x) = x - 1$

b) $a(x) = 9\,x^4 + x^3 - x^2 + x + 2$ et $b(x) = x + 2$

c) $a(x) = 4\,x^3 - 5\,x^2 + 3\,x - 7$ et $b(x) = x$

2.3.9 Déterminer, sans effectuer la division, le reste de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ dans les cas suivants :

a) $A(x) = 2x^3 - x^2 + 5x - 1$ $B(x) = x - 3$

b) $A(x) = x^4 - x + 1$ $B(x) = x + 2$

c) $A(x) = x^3 - 27$ $B(x) = x - 3$

2.3.10 Déterminer les quotients des divisions exactes.

a) $(x^3 - 3\,x^2 + 4) \div [(x - 2)(x + 1)]$

b) $(9\,x^4 + 9\,x^3 - 7\,x^2 - 9\,x - 2) \div [(x + 1)(3\,x + 1)]$

2.3.11 Considérons le polynôme $P(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$. Déterminer s'il est divisible par :

a) $x - 1$ b) $x + 4$ c) $x + \frac{1}{2}$ d) $x + 1$ e) $x + 5$ f) $x - 3$

En déduire une factorisation de $P(x)$.

2.3.12 Trouver les zéros entiers du polynôme

a) $2x^3 - 14x + 12$,

b) $x^4 - 6x^3 + x - 6$.

2.3.13 Déterminer, sans effectuer la division, m et n sachant que :

a) $x^3 + mx + n$ est divisible par $(x - 1)(x + 2)$,

b) $x^3 + mx^2 + n$ est divisible par $x^2 - x - 6$.

2.3.14 Je suis un polynôme de degré 5 et possède les propriétés suivantes :

- je m'annule en 0 et en 2,
- je suis divisible par $x + 2$,
- $x - 3$ apparaît dans ma factorisation,
- le reste de ma division par $x + 3$ est égal à -630,
- mon évaluation en $x = 1$ est égale à 6.

Qui suis-je ?

2.3.15 Factoriser le polynôme :

a) $P(x) = 2x^4 - 3x^3 - 35x^2 - 9x + 45$ sachant que $P(5) = 0$ et $P(-3) = 0$,

b) $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 7x^2 + 6x$ sachant que 2 est une solution de l'équation $P(x) = 0$.

2.3.16 Factoriser le polynôme $p(x) = 2\,x^3 - 8\,x^2 + 8\,x$

2.3.17 Déterminer les solutions entières de l'équation $2x^4 + 11x^3 + 4x^2 - 29x + 12 = 0$.

2.3.18 Factoriser :

a) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 6x$ b) $x^5 + 3x^4 - 16x - 48$ c) $6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$

2.3.19 Déterminer le quotient et le reste de la division en utilisant le schéma de Horner.

a) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par $x - 1$

b) $x^5 + 1$ par $x + 1$

c) $3\,x^5 - 8\,x^4 + 7\,x^3 + x^2 - 5\,x + 6$ par $x + 2$

2.3.20 Monter que $x^6 - 6\,x^5 + 15\,x^4 - 20\,x^3 + 15\,x^2 - 6\,x + 1$ est divisible par $x - 1$.

2.3.21 Calculer le quotient et le reste de la division de $f(x)$ par $g(x)$.

a) $f(x) = 3\,x^3 - x^2 + x + 1 \quad g(x) = 2\,x^2 - 1$

b) $f(x) = 2\,x^3 - 1 \quad g(x) = 3\,x^3 - x^2 + x + 1$

c) $f(x) = 7\,x^5 - x^4 + 6\,x^3 - 7\,x \quad g(x) = 7\,x^3 - x$

d) $f(x) = 6\,x^4 + 4\,x^3 - 7\,x^2 \quad g(x) = 2\,x^2 - 3$

e) $f(x) = 14\,x^4 - 27\,x^3 + 21\,x^2 - 3\,x - 2 \quad g(x) = 2\,x^2 - 3\,x + 2$

f) $f(x) = 14\,x^5 - 36\,x^4 + 23\,x^3 - 11\,x^2 + 18\,x - 8 \quad g(x) = 7\,x^3 - x$

g) $f(x) = 12\,x^5 - 7\,x^4 + 2\,x^2 - 6\,x \quad g(x) = -5\,x^2 + 2\,x - 1$

2.3.22 Le polynôme $p(x) = 2\,x^3 + 3\,x^2 - 11\,x - 6$ possède un zéro compris entre 0 et -5. Décomposer le polynôme $p(x)$ en un produit de facteurs.

2.3.23 Factoriser les polynômes.

a) $x^3 + 9\,x^2 + 11\,x - 21$

b) $x^4 + 2\,x^3 - 16\,x^2 - 2\,x + 15$

c) $x^5 + 3\,x^4 - 16\,x - 48$

d) $x^5 - 3\,x^4 - 21\,x^3 + 43\,x^2 + 96\,x - 180$

2.3.24 Factoriser si possible les polynômes suivants.

a) $p(x) = x^2 + 19\,x + 18$

b) $p(x) = x^2 - 4\,x + 4$

c) $p(x) = 2\,x^2 + 5\,x - 3$

d) $p(x) = 3\,x^2 - 5\,x + 2$

e) $p(x) = 4\,x^2 - 20\,x + 25$

f) $p(x) = x^2 - 9$

g) $p(x) = x^2 - \frac{4}{9}$

h) $p(x) = 9\,x^2 - 5\,x$

i) $p(x) = 8\,x^2 + 6\,x + 1$

j) $p(x) = \frac{1}{3}\,x^2 - x + 4$

2.3.25 Résoudre les équations suivantes par factorisation.

a) $x^3 + 2\,x^2 - x - 2 = 0$

b) $x^3 - 3\,x^2 - 4\,x + 12 = 0$

c) $4\,x^5 - 12\,x^4 + 9\,x^3 = 0$

d) $16\,x^3 - 16\,x^2 - 4\,x + 4 = 0$

2.3.26 Résoudre les équations.

a) $x^4 + 2\,x^3 - 4\,x^2 - 5\,x - 6 = 0$

b) $x^4 - 7\,x^3 + 18\,x^2 - 20\,x + 8 = 0$

c) $35\,x^3 + 47\,x^2 + 13\,x + 1 = 0$

d) $x^3 + 5\,x^2 - 8\,x - 48 = 0$

2.3.27 Factoriser :

a) $x^3 + 2x^2 + x$

b) $2a^6 - 6a^4 + 6a^2 - 2$

c) $9a^3 - ab^2$

d) $54a^6 - 2$

e) $1 - (x - y)^2$

f) $(x^2 - 1)^2 + 4x^2$

g) $(-3x + y)^2 - (4x - z)^2$

h) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$

i) $xy - 9x^3y$

j) $x^4 + 3x^3 - 8x - 24$

k) $2a^3b - a^2b^2 + b^2 - 2ab$

l) $x^3 + 8y^3 + 6x^2y + 12xy^2$

m) $b^3 - a^3$

n) $3x^4 - 18x^3 + 36x^2 - 24x$

o) $8a^4x^3 - 72b^2x^3 - a^4 + 9b^2$

p) $x^3 + 9x - 27 - 3x^2$

q) $d^3 - 8 + 3(d^2 - 4d + 4)$

r) $x^4y^3 + 3x^3y^2 + 3x^2y + x$

s) $z^2x^6 - 5z^2x^4 + 4z^2x^2$

t) $6x^4 + 13x^3 - 13x - 6$

u) $x^3y + 7x^2y + 6xy$

v) $16a^4 + 2ab^3$

w) $8c^3 + 6c + 12c^2 + 1$

x) $(y^2 + b^2)^2 - 4b^2y^2$

2.4 Fractions rationnelles

2.4.1 Rendre les fractions rationnelles irréductibles :

a) $\dfrac{54a^3b^3}{15a^5b^2}$

b) $\dfrac{-16u^2v^2w^3}{-4u^3vw^2}$

c) $\dfrac{x-1}{2x-2}$

d) $\dfrac{2x-2y}{3y-3x}$

e) $\dfrac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$

f) $\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$

g) $\dfrac{x-x^3}{x^4+2x^3+x^2}$

h) $\dfrac{3z^2-21z+36}{2z^2-12z+18}$

i) $\dfrac{x^3-15x^2+75x-125}{x^2-25}$

j) $\dfrac{x^4-y^4}{x^5-x^3y^2}$

k) $\dfrac{10x^2-10xy}{5x^2y^2-5x^4}$

l) $\dfrac{6x^2+2x}{27x^3+1}$

m) $\dfrac{1-x^2+x^3-x^5}{x+x^2-x^3-x^4}$

n) $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$

o) $\dfrac{2x^3+9x^2+7x-6}{2x^3+x^2-13x+6}$

2.4.2 Effectuer et réduire :

a) $\dfrac{a+7}{a-1}\cdot\dfrac{a^2-1}{2a+14}$

b) $\dfrac{x+5}{7}\div\dfrac{2x+10}{x-8}$

c) $(x+y)\div\dfrac{x+y}{x-y}$

d) $\dfrac{z^2+z}{z-1}\cdot\dfrac{z-z^2}{z^3}$

e) $\dfrac{x+2}{2x-3}\div\dfrac{x^2-4}{2x^2-3x}$

f) $\dfrac{9x^2-4}{3x^2-5x+2}\cdot\dfrac{9x^4-6x^3+4x^2}{27x^4+8x}$

g) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-1}\cdot\dfrac{2x-2}{x-3}$

h) $\dfrac{6x^2-5x-6}{x^2-4}\div\dfrac{2x^2-3x}{x+2}$

i) $\dfrac{5u^2+12u+4}{u^4-16}\cdot\dfrac{u^2-2u}{25u^2+20u+4}$

2.4.3 Effectuer et réduire :

a) $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{x+6}{x+3}$

b) $\dfrac{x}{x+3}-\dfrac{x+6}{x+3}$

c) $\dfrac{6}{x^2-4}-\dfrac{3x}{x^2-4}$

d) $\dfrac{2}{3x+1}+\dfrac{9}{(3x+1)^2}$

e) $\dfrac{5}{a}-\dfrac{2a-1}{a^2}+\dfrac{a+5}{a^3}$

f) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x}{x^2-1}$

g) $\dfrac{x-3}{x+3}-\dfrac{2x}{x^2+5x+6}$

h) $\dfrac{1}{m}-\dfrac{m}{m^2-1}-\dfrac{2m+1}{m-m^3}$

i) $\dfrac{2y+1}{y^2+4y+4}-\dfrac{6y}{y^2-4}+\dfrac{3}{y-2}$

j) $\dfrac{13-5x}{6x^2-6}+\dfrac{3x}{x+1}-\dfrac{3x-5}{3x-3}$

2.4.4 Effectuer et réduire :

a) $\dfrac{x}{x+y} + \dfrac{y}{x-y} - \dfrac{2\,xy}{x^2-y^2}$

b) $\dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-2\,y}{x+y} + \dfrac{x^2+3\,y^2}{y^2-x^2}$

c) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2-1} - \dfrac{2\,x+1}{x-x^3}$

d) $\dfrac{4}{x^2-y^2} + \dfrac{3\,y}{x^2y-x^3} - \dfrac{x-3\,y}{x^3-xy^2}$

e) $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2} - \dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+xy}$

f) $\dfrac{x-3}{x+3} - \dfrac{4\,x-6\,y}{xy+3\,y+2\,x+6} + \dfrac{y+6}{y+2}$

g) $\dfrac{x+2}{x^2+7\,x+10} - \dfrac{x-3}{x^2-8\,x+15} + \dfrac{x^2-15}{x^2-25}$

h) $\dfrac{2\,x^2-x-7}{x^4-5\,x^2+4} - \dfrac{x-3}{x^3-2\,x^2-x+2}$

2.4.5 Effectuer et réduire :

a) $\left(\dfrac{z+2}{z} - \dfrac{2}{z^2+z}\right)\left(\dfrac{1}{z}+1\right)$

b) $\left[\left(x+\dfrac{2x}{x-2}\right)\left(\dfrac{2x}{x-2}-2\right)\right] \div \dfrac{4x^2}{x^2-4}$

c) $\left(\dfrac{1}{u} - \dfrac{2}{u^2} - \dfrac{3}{u^3}\right) \div \left(\dfrac{1}{u^2}-1\right)$

d) $\dfrac{2x-1}{x+y} \cdot \dfrac{x^2-y^2}{4x^2-1} \cdot \left(1 - \dfrac{2x}{2x-1} + \dfrac{1}{2x+1}\right)$

2.5 Equations et systèmes d'équations

2.5.1 Résoudre les équations ci-dessous :

a) $4\,(x-3) + x\,(x-5) - 30 = 0$

b) $(x+1)(x+2) + (x+3)(x+4) = 42$

c) $(x-2)(x-4) + (x+3)(x-1) = 39$

d) $(x-6)(x+1)+(2\,x+3)(x-5)=0$

e) $(3\,x-5)^2-12x=1$

f) $x-7=6-(x-7)^2$

g) $(5\,x-1)^2+x^2+3=0$

h) $2\,(3\,x+1)^2-32\,(3\,x+1)+126=0$

i) $(x+1)^2-(x-1)^2=(x-8)^2$

j) $(4\,x+1)^2-(3\,x+1)^2=(2\,x+1)^2$

k) $(x+3)^3-(x-4)^3=721$

l) $(x-5)^3-(x+2)^3+91=0$

m) $(2\,x+1)^2-(x-1)(x+11)=(3\,x-2)^2-(3\,x-4)^2$

n) $(x+5)^2-(2\,x-1)(3\,x+5)=(x+3)^2-(x+1)^2$

o) $(4\,x-3)(2\,x-1)-(3\,x+5)^2=(2\,x+3)^2-(4\,x-1)(2\,x+7)-73$

2.5.2 Résoudre l'équation $2\,x^2+7\,x-15=0$. Puis factoriser le polynôme $2\,x^2+7\,x-15$. Factoriser les polynômes ci-dessous d'une manière analogue.

a) $2\,x^2-7\,x-4$

b) $6\,x^2+11\,x+4$

c) $6\,x^2-25\,x-25$

d) $6\,x^2-20\,x+25$

e) $12\,x^2+23\,x-24$

f) $5\,x^2+\frac{29}{3}\,x-\frac{14}{3}$

2.5.3 Résoudre les équations.

a) $x^2-9=0$

b) $4\,x^2-1=0$

c) $(x-2)^2-9\,(x-2)=0$

d) $(x^2-x-6)(x+5)=0$

e) $x^4-5\,x^2+4=0$

f) $(x-1)(x^2+1)=0$

g) $x^3+x^2=4\,x+4$

h) $x^2-9-4\,(x-3)=0$

i) $(x+6)^2-3\,(x+6)+2=0$

j) $x^3+2\,x^2-x-2=0$

2.5.4 Résoudre les équations.

a) $(x^2 - 8\,x + 12)(x + 2)^3 = 0$

b) $(x - 3)(x^2 - 4) = 0$

c) $x^3 + 2\,x^2 - 4\,x = 8$

d) $(2\,x^2 + 3\,x + 1)^2 - (2\,x^2 - 4\,x - 1)^2 = 0$

e) $x\,(x - 2) + (x - 3)(x - 2) = 0$

f) $6\,x^2 = 3\,x^3 - 72\,x$

g) $x^3 + 3\,x^2 = 9\,x + 27$

h) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = x\,(x^2 - 9)$

2.5.5 Résoudre l'équation $(x^2 - 2)^2 - 5\,(x^2 - 2) - 14 = 0$

2.5.6 Résoudre les équations suivantes.

a) $x^4 - 13\,x^2 + 36 = 0$

b) $x^4 - 1 = 0$

c) $x^4 + 2\,x^2 + 1 = 0$

d) $x^6 - 7\,x^3 - 8 = 0$

e) $(x^2 - 1)^2 - 2\,(x^2 - 1) + 1 = 0$

f) $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} - 3 = 0$

g) $(x^2 - 5\,x + 6)^2 - 2\,(x^2 - 5\,x + 6) = 0$

2.5.7 Résoudre les équations.

a) $\dfrac{x - 8}{5} + \dfrac{x^2}{3} = 1$

b) $\dfrac{3\,x - 7}{5} + \dfrac{x^2 - 9}{7} = 2$

c) $\dfrac{1 - 8\,x}{2} - \dfrac{x^2 - 7}{4} + 2\,x = 0$

d) $\dfrac{x^2 - 3}{2} - \dfrac{x^2 + 1}{3} = \dfrac{x^2 - 11}{6}$

e) $\dfrac{3\,x + 1}{8} - \dfrac{x^2 + 5}{4} = \dfrac{55}{2}$

f) $\dfrac{(x - 2)^2}{5} - \dfrac{(x - 3)^2}{4} = 0$

g) $\dfrac{2\,x^2}{3} + \dfrac{7}{2} = \dfrac{x}{2} + 8$

h) $x = \dfrac{2}{5} + \dfrac{5\,x^2}{16}$

i) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{4\,x}{5} - 19 = \dfrac{76}{5}$

j) $\dfrac{5 - 4\,x}{2} + \dfrac{3\,x^2 - 1}{3} = \dfrac{2\,x^2 + 5}{6}$

k) $\dfrac{x^2+5}{8} = \dfrac{2\,(3-x)}{5} - \dfrac{3\,(x-1)}{10}$

l) $\dfrac{x^2-10}{9} - \dfrac{3\,(4-x)}{4} = \dfrac{2\,(x-3)}{3}$

2.5.8 Résoudre les équations suivantes.

a) $\frac{1}{4}\,x + \frac{2}{5} = \frac{1}{5}\,x - \frac{3}{4}$

b) $3\,x + 8 = 2\,(x+4)$

c) $2\,x + 5 = \frac{1}{2}\,(7 - 4\,x)$

d) $\frac{1}{2}\,(8 + 2\,x) = x + 4$

e) $\dfrac{t-5}{3} = \dfrac{2-t}{2}$

f) $3\,x - \dfrac{4-x}{2} = x - \frac{1}{3}$

2.5.9 Résoudre (sans formule) les équations ci-dessous.

a) $x^2 - 9 = 0$

b) $x^2 + 5\,x = 0$

c) $(x-3)^2 = 0$

d) $(x-3)^2 - 4 = 0$

e) $4\,(x+5)^2 - 9 = 0$

f) $4\,(x+5)^2 + 9 = 0$

g) $(x-p)^2 - q = 0$

h) $x^2 + 6\,x + 9 - 4 = 0$

i) $x^2 + 6\,x + 5 = 0$

j) $x^2 + 5\,x + 4 = 0$

k) $2\,x^2 + 10\,x + 8 = 0$

l) $a\,x^2 + b\,x + c = 0$

2.5.10 Résoudre les équations suivantes.

a) $x^2 - 3\,x + 2 = 0$

b) $x^2 - 5\,x + 4 = 0$

c) $x^2 - 4\,x + 5 = 0$

d) $x^2 + 6\,x + 9 = 0$

e) $-x^2 + 30\,x - 209 = 0$

f) $2\,x^2 - 5\,x - 2 = 0$

g) $-\frac{1}{2}\,x^2 + x + 6 = 0$

h) $2\,x^2 = x + 6$

2.5.11 Résoudre les équations suivantes après avoir déterminé leur ensemble de définition.

a) $\dfrac{x-1}{2\,x-1} = \dfrac{3\,x-5}{4\,x-2}$

b) $\dfrac{x^2+x+1}{2\,x+2} = x$

c) $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{3}{4} = 0$

d) $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{3\,x-4}{(x-1)\cdot(x-2)}$

e) $\dfrac{750}{x}+6=\dfrac{720}{x-5}$

f) $\dfrac{x}{x-6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{x}{6}+\dfrac{x+6}{6-x}$

2.5.12 Résoudre les équations ci-dessous :

a) $\dfrac{x-4}{x+8}=0$

b) $\dfrac{g^2-5g}{g^2-8g+15}=0$

c) $\dfrac{2x^3-8x^2-10x}{x-5}=5x$

d) $\dfrac{x+1}{x}-2x=\dfrac{x-1}{x}$

e) $\dfrac{z}{z-3}-\dfrac{2}{2-z}=\dfrac{3}{z^2-5z+6}$

f) $\dfrac{4x}{x+3}-\dfrac{x}{x-3}=-\dfrac{12}{x^2-9}$

g) $\dfrac{t}{t-2}-\dfrac{2}{t+2}=\dfrac{8}{t^2-4}$

h) $\dfrac{x+4}{x}-\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{4}{x^2+4x}$

i) $\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{5}{x^2+x}=\dfrac{4}{x^2-1}$

j) $\dfrac{x+3}{3\,x-1}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{2\,x-9}{4-12\,x}+1$

2.5.13 Résoudre les équations ci-dessous :

a) $1=\dfrac{3\,x}{x^2-9}-\dfrac{x}{2\,x-6}$

b) $\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{x-1}{2\,x}+\dfrac{1}{4}$

c) $\dfrac{2-x}{x+1}-\dfrac{5}{3}=\dfrac{2\,x+1}{3-2\,x}$

d) $\dfrac{10\,x-2}{6\,x-3}+\dfrac{3\,x+5}{4\,x^2-1}=\dfrac{x-1}{2\,x+1}$

e) $\dfrac{x-1}{x^2+x-6}+\dfrac{2\,x+1}{x^2-5\,x+6}+\dfrac{x+5}{x^2-9}=0$

f) $\dfrac{x-3}{x^2-3\,x+2}-\dfrac{x-1}{x^2-5\,x+6}+\dfrac{x-2}{x^2-4\,x+3}=0$

2.5.14 Résoudre les équations suivantes.

a) $\sqrt{7-x}=x-5$

b) $x=4+\sqrt{4\,x-19}$

c) $\sqrt{x+1}-x=x+2$

d) $x-\sqrt{-7\,x-24}=-2$

e) $\sqrt{7-2\,x}-\sqrt{5+x}=\sqrt{4+3\,x}$

f) $\sqrt{11+8\,x}+1=\sqrt{9+4\,x}$

g) $x+\sqrt{x}=20$

h) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{x}}{\sqrt{3}-\sqrt{x}}=3$

i) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2\,x+3}+\sqrt{2\,x-3}$

j) $\sqrt{3\,x-5}-\sqrt{x-1}=\sqrt{4\,x-5}-\sqrt{2\,x-1}$

2.5.15 Résoudre les équations suivantes.

a) $3\sqrt{2\,x-3}+2\sqrt{7-x}=11$

b) $\sqrt{2\sqrt{x+1}}=\sqrt{3\,x-5}$

2.5.16 Résoudre les équations suivantes.

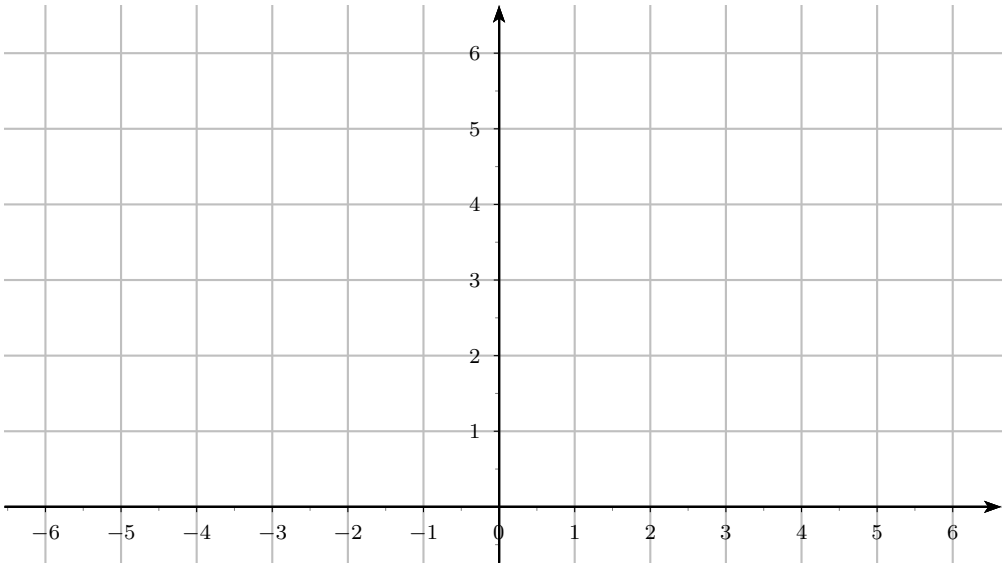
a) $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=3$

b) $3\,x^2-5\,x\sqrt{3\,x^2-5\,x+4}=16$

2.5.17 Soit la fonction valeur absolue $f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}_+$,

$$f(x)=|x|.$$

a) Dans le système d'axes ci-dessous, placer une quinzaine de points qui sont sur le graphe de f.



b) Donner l'image par f de l'ensemble

$$A=\{-100;-45;-10;-9;-3;0;1;2;3;5;36;183\}$$

c) Esquisser le graphe de la fonction

$$g(x)=|x+2|$$

d) Donner l'image par la fonction

$$h(x)=|2x-5|$$

de l'ensemble

$$B=\{-1;0;1;2;3;4;5\}$$

2.5.18 Résoudre les équations suivantes.

a) $|x+4| = 11$

b) $3\,|x-2| + 3 = 7$

c) $4 - |x+2| = 3\,(|x-1| - 1)$

d) $|2\,x+3| - |2-x| = -3$

2.5.19 Résoudre les systèmes d'équations :

a) $\left\{ \begin{array}{rl} x+y & = 1 \\ x-y & = 0 \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{rl} 5\,x-2\,y & = 5 \\ 3\,x-y & = 10 \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{rl} 6\,x+4 & = -6\,y \\ 1-x & = 6\,y \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{rl} 2\,x-4\,y & = 2 \\ x-2\,y & = 1 \end{array} \right.$

e) $\left\{ \begin{array}{rl} 2\,x+4\,y & = 5 \\ x+2\,y & = 2 \end{array} \right.$

f) $\left\{ \begin{array}{rl} 2\,x+3\,y & = 4 \\ 5\,x+6\,y & = 10 \end{array} \right.$

2.5.20 Pour quelle(s) valeur(s) de m le système suivant admet-il exactement une solution ?

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\,x+5\,y & = & 32 \\ x+y & = & 10 \\ 7\,x-3\,y & = & m \end{array} \right.$$

2.5.21 Résoudre les systèmes linéaires ci-dessous :

a) $\left\{ \begin{array}{l} 12\,x-5\,y = 29 \\ 4\,x-3\,y = 11 \end{array} \right.$

b) $\left\{ \begin{array}{l} x+y = 19 \\ 2\,x-3\,y = 11 \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{l} 12\,x+11\,y = 6 \\ 3\,y-2\,x = 24 \end{array} \right.$

d) $\left\{ \begin{array}{l} 72\,x+14\,y = 330 \\ 63\,x+7\,y = 273 \end{array} \right.$

e) $\left\{ \begin{array}{l} 2\,x+3\,y = 4 \\ 3\,y+10\,x = 40 \end{array} \right.$

f) $\left\{ \begin{array}{l} 21\,x+8\,y+66 = 0 \\ 28\,x-23\,y-13 = 0 \end{array} \right.$

g) $\left\{ \begin{array}{l} 2\,x+3\,y+2\,z = 41 \\ 8\,x+5\,y = 31 \\ 7\,y = 21 \end{array} \right.$

h) $\left\{ \begin{array}{l} 2\,x-3\,y+2\,z = 41 \\ 5\,x+3\,y = 10-z \\ 9\,x = 27 \end{array} \right.$

i) $\left\{ \begin{array}{l} 7\,x-4\,y-5\,z = 56 \\ 3\,y-2\,z = 13 \\ 5\,x-3\,y = 22 \end{array} \right.$

j) $\left\{ \begin{array}{l} x+y+z = 25 \\ x-y+z = 5 \\ x+2\,z = 2\,y-10 \end{array} \right.$

k) $\left\{ \begin{array}{l} x-y-z = 6 \\ x-2\,y-3\,z = 10 \\ 5\,x+6\,y+z = 2 \end{array} \right.$

l) $\begin{cases} 3z-2y-x=17 \\ 2y+3z-2x=36 \\ 5x+2y-z=10 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 3x-y+z=29 \\ x+3y+30z=6 \\ x-y+z=17 \end{cases}$

n) $\begin{cases} 2x+3y+4z=47 \\ 3x+5y-4z=2 \\ 4x+7y-2z=31 \end{cases}$

o) $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+2y+z=8 \\ 3x-y+2z=7 \end{cases}$

p) $\begin{cases} x+2y-3z=0 \\ 5x-3y+z=0 \end{cases}$

q) $\begin{cases} 2x-y+3z=4 \\ 3x+4y-z=-5 \\ x+5y-4z=-9 \end{cases}$

r) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ -x+y+z=10 \\ x+y-z=2 \end{cases}$

s) $\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ x-y+4z=15 \\ -x+7y-6z=-27 \end{cases}$

t) $\begin{cases} x+y+z=9 \\ x+2y+3z=14 \\ 3x+2y+z=22 \end{cases}$

u) $\begin{cases} 3x+4y-z=-3 \\ 2x+y-z=-1 \\ x+2y+z=1 \\ x+y-3z=-6 \end{cases}$

v) $\begin{cases} 2x+y+3z=3 \\ 3x-y+4z=2 \\ 4x+y-z=5 \\ x+y+z=4 \end{cases}$

w) $\begin{cases} x+y+2z=4 \\ 3x-y+z=3 \end{cases}$

x) $\begin{cases} x-3y+z-t=0 \\ 2x+y-z+2t=0 \end{cases}$

y) $\begin{cases} x+5y+4z-13t=3 \\ 3x-y+2z+5t=2 \\ 2x+2y+3z-4t=1 \end{cases}$

z) $\begin{cases} x+y+z+t+u=1 \\ x+2y+z+t+u=0 \\ x+y+3z+t+u=3 \\ x+y+z+4t+u=-2 \\ x+y+z+t+5u=5 \end{cases}$

2.5.22 Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2xy-3y=3 \\ y^2-4xy=-15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6} \\ x+y=30 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{11}{10} \\ x+y=11 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ xy-(x+y)=-13 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=2 \\ xy+1=0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2y^2-xy=30 \\ x^2-y^2=5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x^2+y^2-5xy=15 \\ x+y+3xy=-7 \end{cases}$

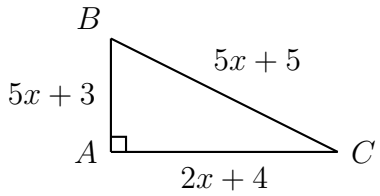
h) $\begin{cases} x+y=9 \\ x^2-y^2=9 \end{cases}$

2.5.23 Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} (2\,x-y)^2-4\,(2\,x-y)=5 \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+3\,\sqrt{x+y}=18 \\ x-y-2\,\sqrt{x-y}=15 \end{cases}$

2.6 Problèmes

2.6.1 On considère le triangle ABC rectangle en A dont les dimensions sont données sur la figure en fonction de x.



Quelles sont les dimensions possibles pour le triangle ABC ?

2.6.2 Trouver deux nombres positifs tels que la somme de leurs carrés soit 180 et la différence de leurs carrés 108.

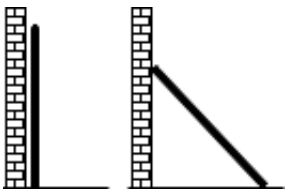
2.6.3

a) La longueur du côté d'un carré est x en cm. L'aire de ce carré augmente de 11 cm^2 si x augmente de 1 cm. Calculer x.

b) L'aire d'un carré augmente de 147 cm^2 si l'on double la longueur x de chacun de ses côtés. Déterminer x.

2.6.4

Un roseau est placé verticalement contre un mur. Si on écarte le pied de ce roseau de 45 cm du bas du mur, son sommet glisse de 15 cm vers le bas. Quelle est la longueur de ce roseau ?



2.6.5

a) On dit qu'un rectangle est de format A si, lorsqu'il est coupé en deux rectangles égaux, ces derniers sont semblables au premier (préservation du rapport des côtés). Déterminer le rapport entre la longueur et la largeur d'un rectangle de format A.

b) Une feuille de papier A0 est une feuille de format A dont la surface mesure 1 m^2. En coupant cette feuille en deux, on obtient deux feuilles A1 ; en coupant en deux une feuille A1, on obtient deux feuilles A2 et ainsi de suite.

Déterminer, en millimètres, la longueur et la largeur d'une feuille de format A4.

2.6.6

Lorsqu'on lâche une pierre du haut d'une falaise, elle parcourt approximativement $4.9\,t^2$ mètres en t secondes. On entend l'impact 4 secondes plus tard. Sachant que la vitesse du son est d'environ 330 m/s, estimer la hauteur de la falaise.

2.6.7

La vitesse v (en mètres par seconde) d'un objet en chute libre est donnée par la fonction $v(t) = 9.8 \cdot t + v_0$ où v_0 est la vitesse initiale et t le temps (en secondes).

a) Exprimer le temps en fonction de la vitesse

b) Quelle est la vitesse de l'objet en $t = 4$ s sachant qu'au temps $t = 2$ s sa vitesse initiale était de 21 m/s ?

2.6.8

Une personne échange des pièces de 2 francs contre des pièces de 5 francs. Pour la même somme, elle a alors 102 pièces de moins qu'auparavant. Quelle est cette somme ?

2.6.9

Une bouteille et son bouchon coûtent 105 francs. La bouteille coûte 100 francs de plus que le bouchon. Quel est le prix du bouchon ? Quel est le prix de la bouteille ?

2.6.10

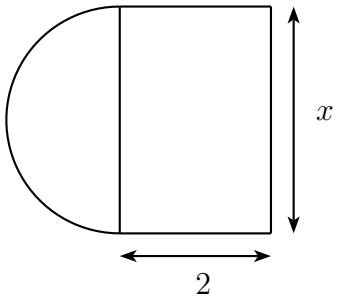
La relation entre la température c sur l'échelle Celsius et la température f sur l'échelle Fahrenheit est donnée par $c = \frac{5}{9} \cdot (f - 32)$.

a) Donner la température qui s'exprime par le même nombre dans les deux échelles.

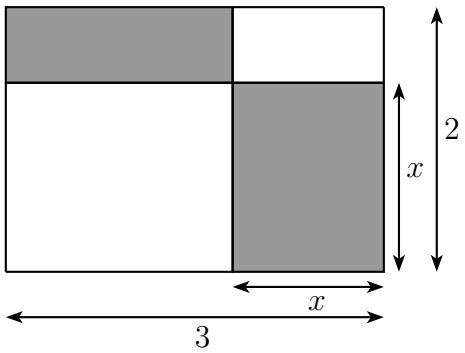
b) Pour quelle température le nombre lu sur l'échelle de Fahrenheit est-il le double du nombre lu sur l'échelle de Celsius ?

2.6.11

Pour quelles valeurs de x l'aire du rectangle est-elle plus grande que celle du demi-disque.



2.6.12
Pour quelle valeur de x le carré et le rectangle grisés ont-ils la même aire ?



2.6.13
On veut construire une boîte sans couvercle à partir d'une feuille rectangulaire de 20 cm sur 30 cm en découpant de chaque coin un carré d'aire x^2, et en relevant les côtés.
Montrer qu'il y a deux façons de construire une telle boîte d'un volume de 1 000 cm^3.

2.6.14
Jean dit à Pierre : "Donne-moi cinq de tes billes et nous en aurons autant l'un que l'autre".
Celui-ci répond : "Donne m'en dix des tiennes et j'en aurai le double de ce qu'il te restera".
Combien chacun avait-il de billes ?

2.6.15
La somme des chiffres d'un nombre entier de trois chiffres est 18. Si l'on permute le premier chiffre(depuis la gauche) et le deuxième, le nombre augmente de 180. Si l'on permute le deuxième et le troisième chiffre, le nombre augmente de 18.
Quel est ce nombre ?

2.6.16
Un téléphérique pratique les tarifs suivants : montée CHF 22.50, descente CHF 15.-, aller-retour CHF 30.-. Pendant une journée, on a encaissé CHF 19650.- pour 680 montées et 520 descentes.
Combien de billets de chaque sorte ont-ils été vendus ?

2.6.17
Un capital de CHF 330740.- est divisé en trois parts placées à 4%, 5% et 6%. Après une année, on ajoute les intérêts à chaque part et on remarque qu'on obtient trois fois la même somme.
Quelles étaient les parts initiales ?

2.6.18
Un libraire détient un certain stock d'un ouvrage. S'il vendait chaque exemplaire à 8 francs, il ferait un bénéfice de 90 francs. Mais, obligé de liquider le stock à moitié prix, il perd au contraire 90 francs.
Combien d'exemplaires de cet ouvrage détient-il ?

2.6.19
Un jardin rectangulaire a pour dimensions 30 m sur 20 m. Une allée de largeur uniforme fait le tour à l'intérieur.
Quelle doit être cette largeur pour que la surface de l'allée soit les $\frac{3}{8}$ de celle du rectangle entier ?

2.6.20
Les diagonales d'un losange diffèrent de 5 cm. Si l'on augmente la petite diagonale de 2 cm et que l'on diminue la grande de 3 cm, son aire diminue de 4 cm^2.
Que mesurent les diagonales de ce losange ?

2.6.21
Le périmètre d'un triangle rectangle mesure 110 m et l'un des côtés de son angle droit, 10 m.
Quelles sont les mesures des deux autres côtés de ce triangle ?

2.6.22
L'aire d'un champ rectangulaire est 31280 m^2. Si l'on augmentait chacune de ses dimensions de 1 m, l'aire serait augmentée de 472 m^2.
Quelles sont les deux dimensions ?

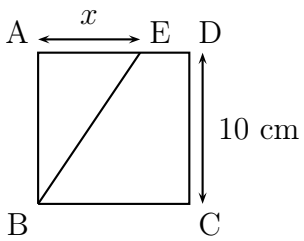
2.6.23
Deux réservoirs de forme cubique ont une capacité totale de 1853 l. La somme de leurs hauteurs est 1.7 m.
Combien mesure le côté de chacun d'eux ?

2.6.24 On s'attend à ce que la population P (en milliers) d'une petite ville croisse selon la formule

$$P = 15 + \sqrt{3\,t + 2}$$

où t est le temps en années. Quand la ville atteindra-t-elle 20'000 habitants ?

2.6.25

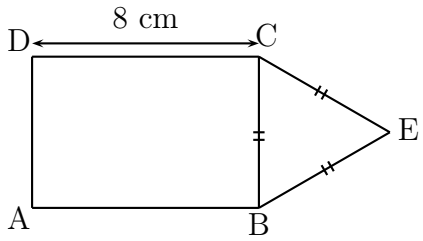


$ABCD$ est un carré et E est un point sur le segment AD. On note x, la longueur AE, exprimée en centimètres.

a) Exprimer, en fonction de x, l'aire du triangle ABE.

b) Quelle valeur faut-il donner à x pour que l'aire du triangle soit égale au quart de l'aire du carré ?

2.6.26



$ABCD$ est un rectangle.
Quelle doit-être la longueur du côté du triangle équilatéral pour que le rectangle et le triangle aient le même périmètre ?

2.7 Solutions des exercices

2.1.1

a) $3 + xz + y^2$

b) $3 - xz - y^2$

c) $3xz + 3y^2$

d) $5a$

e) $-a + 2b - 2c$

f) $6a^2 - b^2 - c^2 + ab - ac + 2bc$

g) $-3x^3 - 2x^2 - 6$

h) $5x^3 - 2x^2 - 4$

i) $-4x^6 + 8x^5 + 19x^3 + 2x^2 + 5$

j) $\dfrac{21u - 7v}{12}$

k) $\dfrac{3u + 13v}{12}$

l) $\dfrac{36u^2 - 31uv - 10v^2}{48}$

2.1.2

a) $a^2 + 2ab + b^2$

b) $a^2 - 2ab + b^2$

c) $a^2 - b^2$

d) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

e) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

f) $a^3 - b^3$

g) $a^3 + b^3$

2.1.3

a) $a^2 + 16a + 64$

b) $y^{12} - 9y^8b + 27y^4b^2 - 27b^3$

c) $u^2 - 9$

d) $8m^3 - 125n^3$

e) $49 - 14f + f^2$

f) $64 + 96z^2 + 48z^4 + 8z^6$

g) $27 + y^9$

h) $x^4 - y^4$

i) $t^3 + 9t^2u^5 + 27tu^{10} + 27u^{15}$

j) $4x^2 - 28x + 49$

k) $b^6 - c^9$

l) $a^3 - 9a^2b + 27ab^2 - 27b^3$

2.1.4

a) $x^2 - y^2 - 2\,x - 2\,y$

b) $4\,x$

c) $x\,y$

d) $4\,y^2$

e) $-x^2 - 6\,x\,y - 14\,y^2$

f) $-2\,x^2 - 2\,x$

g) x^2

h) $4\,x^2\,y^2 - 20\,y^4$

i) 0

j) 0

2.1.5

a) $-36\,a^2b^4 + 49\,x^6$

b) $-57\,x^2y^3 + 12\,x^4 + 49\,y^6 + 5\,y^5 + 20\,x^2y^2$

c) $-19\,x^2 - 26\,xy - 31\,y^2$

d) $8\,a^3 - 36\,a^2b + 54\,ab^2 - 4\,a^2 - 27\,b^3 + 12\,ab - 9\,b^2 - 2\,a + 3\,b$

2.1.6

a) $r(x) = 5\,x^3 - x^2 + x + 1$

b) $s(x) = 6\,x^6 + \cdots + 1\,x^4 + \cdots$

2.1.7

a) $p + q = x^3 + x^2 - x + 2$

b) $p - q = -x^3 + x^2 + 3\,x + 2$

c) $p \cdot q = x^5 + x^4 - 2\,x^2 - 4\,x$

2.1.8

a) $9\,x^4 - 24\,x^3 + 34\,x^2 - 24\,x + 9$

b) $x^4 + x^2 + x - 1$

c) 7

d) 2

e) 6

Remarque $p \cdot q = 2\,x^7 + x^6 - 15\,x^5 + 6\,x^4 + 92\,x^3 - 67\,x^2 - 157\,x + 306$

2.1.9

a) $-z$

b) $xy^2 + y^3$

c) $7\,x^3 - 2\,xy^2$

d) $5\,xy + \frac{15}{8}\,x^2y - \frac{3}{2}\,y^2$

e) $\frac{7}{12}\,x^6 - 17\,x^4 - x^2y^2$

f) $24\,x^4 - 2\,x^3 + 5\,x^2 + 7\,x - 6$

g) $x^4 + 2\,x^3 - 41\,x^2 - 42\,x + 360$

h) $6\,x^2 - 10\,x$

i) $x^3 + y^3$

j) $2\,x^2y - 4\,xy^2$

2.1.10

a) $4\,x - 4$
b) $5\,x^2 - 13\,x + 9$
c) $6\,x^2 + 2$
d) $-2\,x^3 + 6\,x^2y + 4\,y^3$
e) 0
f) 0
g) $8\,x^3 - 30\,x^2y + 36\,xy^2 - 54\,y^3$
h) $125\,x^6 - 300\,x^5y + 240\,x^4y^2 - 64\,x^3y^3$
i) $x^6 + x^4 - x^2 - 1$
j) $4\,xy$

2.2.1

a) $y(x+1)$
b) $a(m+p)$
c) $a^2x^2(a-x)$
d) $2u(2v-w)$
e) $2a(3a+2b)$
f) $12yz^2(2y^2z^3-3)$
g) $2yz^2(z^3+4yz^2+3y^2z-y^3)$
h) $5m^5n^2(3m^2-2n)$
i) $abc^2(3a-c)$
j) $(2x+y)(5a+8b)$
k) $ab^3c^2(3bc-1)$
l) $2u^3v(v+4v^2-3u)$
m) $3(x-3)(x-2)$
n) $(u+v)^2(u+v-1)$
o) $(a-b)(a+b)$

2.2.2

a) $(ab-m)(ab+m)$
b) $(x^2-y)(x^2+y)$
c) $\left(a-\frac{1}{4}\right)\left(a+\frac{1}{4}\right)$
d) $(a+b+x)(a+b-x)$
e) $(ax+2x-y)(ax-2x+5y)$
f) $(a-b+1)(a-b-1)$
g) $3(a+1)(a-1)$
h) $x^3(2xy+3)(2xy-3)$
i) $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$
j) $a(a^2+1)(a+1)(a-1)$
k) $\left(\frac{u^2}{25}+\frac{v^2}{9}\right)\left(\frac{u}{5}+\frac{v}{3}\right)\left(\frac{u}{5}-\frac{v}{3}\right)$
l) $x(x^2y^2+1)(xy+1)(xy-1)$
m) $(a+1)^2$
n) $(1+x^2)^2$
o) $(a^2-3b)^2$
p) $(3x^2+4y)^2$
q) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$
r) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}\right)^2$
s) $(a+b-c)^2$

t) $5(x-1)^2$

u) $(a+b)(x+1)^2$

2.2.3

a) $(x^4-5)(x^8+5x^4+25)$

b) $a\left(a-\frac{2b}{3}\right)\left(a^2+\frac{2ab}{3}+\frac{4b^2}{9}\right)$

c) $\left(3c+\frac{1}{4}\right)\left(9c^2-\frac{3}{4}c+\frac{1}{16}\right)$

d) $(z+2ab^2)(z^2-2ab^2z+4a^2b^4)$

e) $(z^2+3)(z^4-3z^2+9)$

f) $(z-2)^3$

g) $(1+3a)^3$

h) $\left(x+\frac{y}{3}\right)^3$

i) $12\left(a+\frac{b}{4}\right)^3$

2.2.4

a) $(x+2)(x+3)$

b) $(x+1)(x+4)$

c) $(u-2)(u-4)$

d) $(x-7)(x+5)$

e) $(3x+1)^2$

f) $(4z+1)(z+1)$

g) $(x-10)(x+8)$

h) $3\left(y+\frac{7+\sqrt{13}}{6}\right)\left(y+\frac{7-\sqrt{13}}{6}\right)$

i) $(2x+1)(3x+1)$

j) $(x-17)(x-5)$

k) x^2+x+1

l) $(4u-9)^2$

m) $(5x-4)(8x+7)$

n) $(a+10)(a-1)$

o) $2\left(x-\frac{5+\sqrt{41}}{4}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{41}}{4}\right)$

p) $(4m-3)(m+7)$

2.2.5

a) $(x+3)(x-3)(x+2)(x-2)$

b) $(a-2)(a^2+2a+4)(a+3)(a^2-3a+9)$

c) $(x^2+16)(x+4)(x-4)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

d) $(x+3)(x-3)(7x^2+2)$

e) $(x-1)(x^2+x+1)(4x-3)(16x^2+12x+9)$

f) $(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)(2x^2+3)$

g) $(4x^2+25)(2x+5)(2x-5)(x^2+1)(x+1)(x-1)$

h) $(9x-1)(9x+1)(x^2+1)$

2.2.6

a) $(x+y)(a+b)$

b) $(a+b)(1+x+y)$

c) $(a-b)(x-y)$

d) $(a-4)(x-y)$

e) $(a+1)(x-1)$

f) $(x^2+1)(x-1)$

g) $\left(\frac{x}{2}+\frac{z}{3}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)$

h) $(10z-x)(x-1)$

i) $(a-b+1)(a-b-1)$

j) $(2x-3y)(2x+3y+1)$

k) $(1+x)(1+x+x^2)(1-x+x^2)$

l) $(2y+1)(4y^2-2y+1)(y-1)$

m) $(x^2+1)(x-1)$

n) $(2a^3+3)(a-1)$

o) $(6x+y)(x+3z)$

2.2.7

a) $(x-2\,y)(1-2\,y)$

b) $(2\,x+3)(x-5\,y)$

c) $(1+4\,y^2)(3\,x^3-5\,z)$

d) $(2\,x+3\,y)(4+y)$

e) $\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{3}\,y\right)$

f) $\left(x^3-\frac{4}{5}\,y\right)\left(x^2-\frac{5}{4}\,z\right)$

g) $\left(\frac{2}{9}\,y^3-\frac{1}{20}\right)\left(x^2+\frac{20}{3}\right)$

h) $x^2y^3(3\,z+1)(x^2+xy-y^2)$

i) $(x^{2m}-2\,y^m)(x^{m+2}-y^{m+3})$

j) $(x^m-y^{2n})(x^{2m+1}+2\,y^{3n})$

2.3.1

a) $Q(x)=x^2-3x+1$, $R(x)=0$

b) $Q(x)=x^3-3x^2+3x-7$, $R(x)=20x-8$

c) $Q(x)=x^2-3x+3$, $R(x)=-8x+4$

d) $Q(x)=7x^2+8x+1$, $R(x)=0$

e) $Q(x)=x^6+x^5-x^3+x+1$, $R(x)=0$

f) $Q(x)=x^2-4x+2$, $R(x)=x^4-10x$

g) $Q(x)=\frac{1}{2}x^3$, $R(x)=-x^4-\frac{1}{2}x^3+1$

h) $Q(x)=x^4-2x^3+x^2+5$, $R(x)=-10$

i) $Q(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{10}{9}$, $R(x) = 0$

j) $Q(x) = x + 4$, $R(x) = 12x - 1$

2.3.2

a) $a(x) = b(x) \cdot (x^2 - 5\,x + 6)$
b) $a(x) = b(x) \cdot (-4\,x^2 - 5\,x + 2) + (46\,x)$
c) $a(x) = b(x) \cdot (-\,x^3 - \,x^2 + 4) + (-3\,x + 9)$

2.3.3

Il faut multiplier $x - 5$ par $x^2 + 2\,x + 6$.

2.3.4

Le polynôme est $10\,x^4 - 6\,x^3 + 7\,x^2 - 4\,x + 2$.

2.3.5

$P(1) = -3$; $P(3) = 35$; $P(0) = -7$; $P(-2) = -45$; $P(-3) = -103$; $P(\frac{1}{3}) = -\frac{151}{27}$; $P(-\frac{1}{2}) = -\frac{21}{2}$.

2.3.6

Soit $A = t^5 - 7\,t^4 - t^2 - 9\,t + 9$, $B = t^2 - 5\,t + 4$, le quotient de A par B est $t^3 - 2\,t^2 - 14\,t - 63$, le reste étant $-268\,t + 261$.

2.3.7

$P = \frac{1}{3}(X^2 - 4X - 3)$.

2.3.8

a) $a(1) = 0$ donc le polynôme $b(x)$ divise le polynôme $a(x)$
b) $a(-2) = 132$
c) $a(0) = -7$

2.3.9

59 ; 19 ; 0.

2.3.10

a) $x - 2$ b) $3\,x^2 - x - 2$

2.3.11

a) oui ; b) non ; c) non ; d) oui ; e) oui ; f) oui ; $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 5)(x - 3)$.

2.3.12

a)1, 2, -3 ; b) -1, 6.

2.3.13

a)$m = -3$ et $n = 2$; b) $m = -7$ et $n = 36$.

2.3.14
Je suis $x(x-2)(x+2)(x-3)(2x-1)$.

2.3.15
a)$P(x) = (x-5)(x+3)(x-1)(2x+3)$; b) $P(x) = x(x-2)(x-3)(2x+1)$.

2.3.16
$2\,x\,(x-2)^2$

2.3.17
$\frac{1}{2}$; -4 ; -3 ; 1.

2.3.18
a)$P(x) = x(x+1)(x-2)(x+3)$;
b)$P(x) = (x-2)(x+2)(x+3)(x^2+4)$;
c)$P(x) = (x-2)(x+2)(2x-1)(3x-1)$.

2.3.19

a) quotient : $x^3 + 2\,x^2 + 3\,x + 4$ reste : 5
b) quotient : $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ reste : 0
c) quotient : $3\,x^4 - 14\,x^3 + 35\,x^2 - 69\,x + 133$ reste : -260

2.3.20
En effectuant la division et en trouvant 0 comme reste, ou si $f(x) = x^6 - 6\,x^5 + 15\,x^4 - 20\,x^3 + 15\,x^2 - 6\,x + 1$, alors $f(1) = 0$.

2.3.21

a) $q(x) = \frac{3}{2}\,x - \frac{1}{2}$, $r(x) = \frac{5}{2}\,x + \frac{1}{2}$
b) $q(x) = \frac{2}{3}$, $r(x) = \frac{2}{3}\,x^2 - \frac{2}{3}\,x - \frac{5}{3}$
c) $q(x) = x^2 - \frac{1}{7}\,x + 1$, $r(x) = -\frac{1}{7}\,x^2 - 6\,x$
d) $q(x) = 3\,x^2 + 2\,x + 1$, $r(x) = 6\,x + 3$
e) $q(x) = 7\,x^2 - 3\,x - 1$, $r(x) = 0$
f) $q(x) = 2\,x^2 - \frac{36}{7}\,x + \frac{25}{7}$, $r(x) = -\frac{113}{7}\,x^2 + \frac{151}{7}\,x - 8$
g) $q(x) = -\frac{12}{5}\,x^3 + \frac{11}{25}\,x^2 + \frac{82}{125}\,x - \frac{141}{625}$, $r(x) = -\frac{3058}{625}\,x - \frac{141}{625}$

2.3.22 $p(x) = (x-2)\,(x+3)\,(2x+1)$

2.3.23

a) $(x-1)\,(x+3)\,(x+7)$
b) $(x-3)\,(x-1)\,(x+1)\,(x+5)$
c) $(x-2)\,(x+2)\,(x+3)\,(x^2+4)$
d) $(x-2)^2\,(x-5)\,(x+3)^2$

2.3.24

a) $p(x) = (x+18)\cdot(x+1)$
b) $p(x) = (x-2)^2$
c) $p(x) = 2\,(x+3)\cdot(x-\frac{1}{2})$
d) $p(x) = 3\,(x-\frac{2}{3})\cdot(x-1)$
e) $p(x) = 4\,(x-\frac{5}{2})^2$
f) $p(x) = (x-3)\cdot(x+3)$
g) $p(x) = (x-\frac{2}{3})(x+\frac{2}{3})\cdot$
h) $p(x) = 9\,x\,(x-\frac{5}{9})\cdot$
i) $p(x) = 8\,(x+\frac{1}{2})\cdot(x+\frac{1}{4})$
j) $p(x) = \frac{1}{3}\,x^2 - x + 4$

2.3.25

a) $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$
b) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$
c) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$
d) $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$

2.3.26

a) $(x-2)(x+3)(x^2+x+1) = 0 \quad S = \{-3\,;\,2\}$
b) $(x-1)\,(x-2)^3 = 0 \quad S = \{1\,;\,2\}$
c) $(x+1)\,(5\,x+1)\,(7\,x+1) = 0 \quad S = \{-1\,;\,-\frac{1}{5}\,;\,-\frac{1}{7}\}$
d) $(x-3)\,(x+4)^2 = 0 \quad S = \{-4\,;\,3\}$

2.3.27

a) $x(x+1)^2$
b) $2(a+1)^3(a-1)^3$
c) $a(3a+b)(3a-b)$
d) $2(\sqrt{3}a+1)(\sqrt{3}a-1)(9a^4+3a^2+1)$
e) $(1+x-y)(1-x+y)$
f) $(x^2+1)^2$
g) $(x+y-z)(-7x+y+z)$
h) $(x-1)(x+3)(x+7)$
i) $xy(1-3x)(1+3x)$
j) $(x+3)(x-2)(x^2+2x+4)$
k) $b(2a-b)(a+1)(a-1)$
l) $(x+2y)^3$
m) $(b-a)(b^2+ab+a^2)$
n) $3x(x-2)^3$
o) $(a^2+3b)(a^2-3b)(2x-1)(4x^2+2x+1)$
p) $(x-3)(x^2+9)$
q) $(d-2)\left(d-\dfrac{-5+\sqrt{33}}{2}\right)\left(d-\dfrac{-5-\sqrt{33}}{2}\right)$
r) $x(xy+1)^3$
s) $z^2x^2(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

t) $(x-1)(x+1)(3x+2)(2x+3)$

u) $xy(x+1)(x+6)$

v) $2a(2a+b)(4a^2-2ab+b^2)$

w) $(2c+1)^3$

x) $(y+b)^2(y-b)^2$

2.4.1

a) $\dfrac{18b}{5a^2}$

b) $\dfrac{4vw}{u}$

c) $\dfrac{1}{2}$

d) $-\dfrac{2}{3}$

e) $\dfrac{a+b}{a-b}$

f) $\dfrac{x+4}{x-1}$

g) $\dfrac{1-x}{x(x+1)}$

h) $\dfrac{3(z-4)}{2(z-3)}$

i) $\dfrac{(x-5)^2}{x+5}$

j) $\dfrac{x^2+y^2}{x^3}$

k) $\dfrac{-2}{x(x+y)}$

l) $\dfrac{2x}{9x^2-3x+1}$

m) $\dfrac{1-x+x^2}{x}$

n) $\dfrac{x+1}{x+2}$

o) $\dfrac{x+2}{x-2}$

2.4.2

a) $\dfrac{a+1}{2}$

b) $\dfrac{x-8}{14}$

c) $x-y$

d) $-\dfrac{z+1}{z}$

e) $\dfrac{x}{x-2}$

f) $\dfrac{x}{x-1}$

g) $\dfrac{2(x-3)}{x+1}$

h) $\dfrac{2+3x}{x(x-2)}$

i) $\dfrac{u}{(u^2+4)(2+5u)}$

2.4.3

a) 2

b) $\dfrac{-6}{x+3}$

c) $\dfrac{-3}{x+2}$

d) $\dfrac{6x+11}{(3x+1)^2}$

e) $\dfrac{3a^2+2a+5}{a^3}$

f) $\dfrac{x-1}{x+1}$

g) $\dfrac{x^2-3x-6}{(x+2)(x+3)}$

h) $\dfrac{2}{(m+1)(m-1)}$

i) $-\dfrac{y+5}{(y+2)^2}$

j) $\dfrac{12x^2-19x+23}{6(x+1)(x-1)}$

2.4.4

a) $\dfrac{x-y}{x+y}$

b) $\dfrac{x}{x+y}$

c) $\dfrac{2}{x^2-1}$

d) $\dfrac{3}{x^2}$

e) $\dfrac{x^2}{x+y}$

f) 2

g) 1

h) $\dfrac{1}{x^2-4}$

2.4.5

a) $\dfrac{z+3}{z}$

b) $\dfrac{x+2}{x-2}$

c) $\dfrac{u-3}{u(1-u)}$

d) $-\dfrac{2(x-y)}{(2x+1)^2(2x-1)}$

2.5.1

a) $S=\{-6;7\}$
b) $S=\{-7;2\}$
c) $S=\{1-3\sqrt{2};1+3\sqrt{2}\}$
d) $S=\{2-\sqrt{11};2+\sqrt{11}\}$
e) $S=\{\frac{2}{3};4\}$
f) $S=\{4;9\}$
g) $S=\emptyset$
h) $S=\{2;\frac{8}{3}\}$
i) $S=\{4;16\}$
j) $S=\{-\frac{1}{3};1\}$
k) $S=\{-5;6\}$
l) $S=\{1;2\}$
m) $S=\{2;4\}$
n) $S=\{-\frac{11}{5};2\}$
o) $S=\{\frac{5}{3};7\}$

2.5.2

$2\,x^2+7\,x-15=0 \iff x=\frac{3}{2}$ ou $x=-5$
$2\,x^2+7\,x-15=(2\,x-3)(x+5)$

a) $(x-4)(2\,x+1)$
b) $(2\,x+1)(3\,x+4)$
c) $(x-5)(6\,x+5)$
d) Pas factorisable
e) $(3\,x+8)(4\,x-3)$
f) $(5\,x-2)(x+\frac{7}{3})$

2.5.3

a) $\mathcal{S}=\{-3;3\}$

b) $\mathcal{S}=\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\}$

c) $\mathcal{S}=\{2;11\}$

d) $\mathcal{S}=\{-5;-2;3\}$

e) $\mathcal{S} = \{-2; -1; 1; 2\}$
f) $\mathcal{S} = \{1\}$
g) $\mathcal{S} = \{-2; -1; 2\}$
h) $\mathcal{S} = \{1; 3\}$
i) $\mathcal{S} = \{-5; -4\}$
j) $\mathcal{S} = \{-2; -1; 1\}$

2.5.4

a) $\mathcal{S} = \{-2; 2; 6\}$
b) $\mathcal{S} = \{-2; 2; 3\}$
c) $\mathcal{S} = \{-2; 2\}$
d) $\mathcal{S} = \{-\frac{2}{7}; 0; \frac{1}{4}\}$
e) $\mathcal{S} = \{\frac{3}{2}; 2\}$
f) $\mathcal{S} = \{-4; 0; 6\}$
g) $\mathcal{S} = \{-3; 3\}$
h) $\mathcal{S} = \{\frac{1}{3}; 3\}$

2.5.5 $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$

2.5.6

a) $x_1 = -3$, $x_{2,3} = \pm 2$, $x_4 = 3$
b) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$
c) Pas de solution
d) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$
e) $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$
f) $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{3}$
g) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$

2.5.7

a) $5\,x^2 + 3\,x - 39 = 0$, $\Delta = 789$, $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-3 - \sqrt{789}}{10}; \dfrac{-3 + \sqrt{789}}{10}\right\}$
b) $5\,x^2 + 21\,x - 164 = 0$, $\Delta = 3721 = 61^2$, $\mathcal{S} = \{-\frac{41}{5}; 4\}$
c) $x^2 + 8\,x - 9 = 0$, $\Delta = 10^2$, $\mathcal{S} = \{-9; 1\}$
d) $0 = 0$, indéterminé, $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
e) $2\,x^2 - 3\,x + 229 = 0$, $\Delta = -1823$, impossible, $\mathcal{S} = \emptyset$
f) $x^2 - 14\,x + 29 = 0$, $\Delta = 80 = 16 \cdot 5$, $\mathcal{S} = \{7 - 2\sqrt{5}; 7 + 2\sqrt{5}\}$
g) $4\,x^2 - 3\,x - 27 = 0$, $\Delta = 441 = 21^2$, $\mathcal{S} = \{-\frac{9}{4}; 3\}$
h) $25\,x^2 - 80\,x + 32 = 0$, $\Delta = 3200 = 1600 \cdot 2$, $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{8 - 4\sqrt{2}}{5}; \dfrac{8 + 4\sqrt{2}}{5}\right\}$
i) $5\,x^2 + 12\,x - 513 = 0$, $\Delta = 10404 = 102^2$, $\mathcal{S} = \{-\frac{57}{5}; 9\}$
j) $x^2 - 3\,x + 2 = 0$, $\Delta = 1$, $\mathcal{S} = \{1; 2\}$
k) $5\,x^2 + 28\,x - 35 = 0$, $\Delta = 1484 = 4 \cdot 371$, $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{-14 - \sqrt{371}}{5}; \dfrac{-14 + \sqrt{371}}{5}\right\}$
l) $4\,x^2 + 3\,x - 76 = 0$, $\Delta = 1225 = 35^2$, $\mathcal{S} = \{-\frac{19}{4}; 4\}$

2.5.8

a) $\mathcal{S} = \{-23\}$
b) $\mathcal{S} = \{0\}$
c) $\mathcal{S} = \{\frac{-3}{8}\}$
d) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
e) $\mathcal{S} = \{\frac{16}{5}\}$
f) $\mathcal{S} = \{\frac{2}{3}\}$

2.5.9

a) $x_1 = -3$, $x_2 = 3$
b) $x_1 = -5$, $x_2 = 0$
c) $x = 3$
d) $x_1 = 1$, $x_2 = 5$
e) $x_1 = -\frac{13}{2}$, $x_2 = -\frac{7}{2}$
f) Pas de solution
g) $x_1 = p - \sqrt{q}$, $x_2 = p + \sqrt{q}$ si $q > 0$
h) $x_1 = -5$, $x_2 = -1$
i) $x_1 = -5$, $x_2 = -1$
j) $x_1 = -4$, $x_2 = -1$
k) $x_1 = -4$, $x_2 = -1$
l) $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}$ si $b^2 - 4\,a\,c$

2.5.10

a) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$
b) $x_1 = 1$, $x_2 = 4$
c) Pas de solution
d) $x = -3$
e) $x_1 = 11$, $x_2 = 19$
f) $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{4}$
g) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{13}$
h) $x_1 = -\frac{3}{2}$, $x_2 = 2$

2.5.11

a) $x_1 = 3$
b) $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
c) $x_1 = -5$, $x_2 = -\frac{5}{3}$
d) $x_1 = 4$
e) $x_1 = -25$, $x_2 = 25$
f) $x_1 = -3$, $x_2 = 18$

2.5.12

a) $S = \{4\}$
b) $S = \{0\}$
c) $S = \{0; \frac{3}{2}\}$
d) $S = \{-1; 1\}$
e) $S = \{-3\}$
f) $S = \{1; 4\}$
g) $S = \emptyset$
h) $S = \{-3\}$
i) $S = \{2\}$
j) $S = \{2\}$

2.5.13

a) $ED = \mathbb{R} - \{-3; 3\}$, $S = \{-2\}$

b) $ED = \mathbb{R} - \{-3; 0\}$, $S = \{1; 6\}$

c) $ED = \mathbb{R} - \{-1; \frac{3}{2}\}$, $S = \{0; \frac{7}{2}\}$

d) $ED = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\}$, $S = \{-1; -\frac{5}{7}\}$

e) $ED = \mathbb{R} - \{-3; 2; 3\}$, $S = \{-2; \frac{1}{2}\}$

f) $ED = \mathbb{R} - \{1; 2; 3\}$, $S = \{6\}$

2.5.14

a) $x = 6$

b) $x_1 = 5$, $x_2 = 7$

c) $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{3}{4}$

d) Pas de solution

e) $x = -1$

f) $x = -\frac{5}{4}$

g) $x = 16$

h) $x = \frac{3}{4}$

i) Pas de solution

j) $x = 2$

2.5.15

a) $x = 6$

b) $x = 3$

2.5.16

a) $x = \frac{5}{3}$

b) $x = 3$ ou $x = -\frac{4}{3}$

2.5.17

a) –

b) $f(A) = \{100; 45; 10; 9; 3; 0; 1; 2; 3; 5; 36; 183\}$

c) –

d) $h(B) = \{7; 5; 3; 1; 1; 3; 5\}$

2.5.18

a) $x = 7$ ou $x = -15$

b) $x = \frac{2}{3}$ ou $x = \frac{10}{3}$

c) $x = -1$ ou $x = 2$

d) $x = -2$ ou $x = -\frac{4}{3}$

2.5.19

a) $(x; y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

b) $(x; y) = (15; 35)$

c) $(x; y) = \left(-1; \frac{1}{3}\right)$

d) $(x; y) = (2\,t + 1; t)\,, t \in \mathbb{R}$

e) Aucune solution

f) $(x; y) = (2; 0)$

2.5.20 $m = 30$

2.5.21

a) $(x;y) = (2;-1)$
b) $(x;y) = (\frac{68}{5};\frac{27}{5})$
c) $(x;y) = (-123/29;150/29)$
d) $(x;y) = (4;3)$
e) $(x;y) = (9/2;-5/3)$
f) $(x;y) = (-2;-3)$
g) $(x;y;z) = (2;3;14)$
h) $(x;y;z) = (3;-5;10)$
i) $(x;y;z) = (5;1;-5)$
j) $(x;y;z) = (20;10;-5)$
k) $(x;y;z) = (3;-2;-1)$
l) $(x;y;z) = (28/15;313/60;293/30)$
m) $(x;y;z) = (6;-10;1)$
n) $(x;y;z) = (-39/5;11;37/5)$
o) $(x;y;z) = (1;2;3)$
p) $(x;y;z) = (7\,t;16\,t;13\,t), t \in \mathbb{R}$
q) $(x;y;z) = (1-t;t-2;t), t \in \mathbb{R}$
r) $(x;y;z) = (1;6;5)$
s) $(x;y;z) = (13-11\,t;t-2;3\,t), t \in \mathbb{R}$
t) $(x;y;z) = (t+4;5-2\,t;t), t \in \mathbb{R}$
u) $(x;y;z) = (1;-1;2)$
v) Le système n'a pas de solution.
w) $(x;y;z) = (7/4-3\,t;9/4-5\,t;4\,t), t \in \mathbb{R}$
x) $(x;y;z;t) = (2\,u-5\,v;3\,u-4\,v;7\,u;7\,v), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$
y) Le système n'a pas de solution.
z) $(x;y;z;t;u) = (1;-1;1;-1;1)$

2.5.22

a) $(x;y) = (2;3)$
b) $(x;y) = (-60;90)$ ou $(18;12)$
c) $(x;y) = (1;10)$ ou $(10;1)$
d) $(x;y) = (-5;3)$ ou $(3;-5)$ ou $(2+\sqrt{13};2-\sqrt{13})$ ou $(2-\sqrt{13};2+\sqrt{13})$
e) $(x;y) = (-1;1)$ ou $(1;-1)$
f) $(x;y) = (3;2)$ ou $\left(\sqrt{2.5\cdot(\sqrt{5}-1)};-\sqrt{2.5\cdot(\sqrt{5}+1)}\right)$ ou $(-3;-2)$ ou $\left(-\sqrt{2.5\cdot(\sqrt{5}-1)};\sqrt{2.5\cdot(\sqrt{5}+1)}\right)$
g) $(x;y) = (1;-2)$ ou $\left(\frac{\sqrt{21}-2}{3};\frac{-\sqrt{21}-2}{3}\right)$ ou $(-2;1)$ ou $\left(\frac{-\sqrt{21}-2}{3};\frac{\sqrt{21}-2}{3}\right)$
h) $(x;y) = (5;4)$

2.5.23

a) $(x;y) = (2;-1)$ ou $(\frac{14}{3};\frac{13}{3})$
b) $(x;y) = (17;-8)$

2.6.1 On trouve $x = 0$ et $x = 1$. Les triangles ont pour dimensions 3, 4, 5 et 6, 8, 10.

2.6.2
Les deux nombres cherchés sont 6 et 12.

2.6.3

a) $x = 5$ b) $x = 7$

2.6.4
$x = 75cm$

2.6.5

a) $\sqrt{2}$ b) 297.3×210.2

2.6.6
70.27 m

2.6.7

a) $t(v) = \dfrac{(v - v_0)}{9.8}$ b) 40.6 m/s

2.6.8
La somme est égale à 340 francs.

2.6.9
La bouteille coûte 102.50 francs et le bouchon coûte 2.50 francs.

2.6.10

a) -40 b) 160 °C

2.6.11
$x < \frac{16}{\pi}$

2.6.12
$x = \frac{6}{5}$

2.6.13
En choisissant $x = 5$ ou $x = 5\,(2 - \sqrt{2})$

2.6.14
Jean avait 40 billes et Pierre avait 50 billes.

2.6.15
Le nombre est 468.

2.6.16
220 montées, 60 descentes et 460 aller-retour.

2.6.17
CHF 111300.- ; CHF 110240.- ; CHF 109200.-

2.6.18
Il détient 45 ouvrages.

2.6.19
La largeur de l'allée est de 2.5 m.

2.6.20
Les diagonales de ce losange mesurent 12 cm et 17 cm.

2.6.21
Les deux autres côtés du triangle mesurent 49.5 m et 50.5 m.

2.6.22
Les deux dimensions sont 391 m et 80 m.

2.6.23
Le côté du premier réservoir mesure 1.2 m ; celui du second mesure 0.5 m.

2.6.24
Après $t = \frac{23}{3}$ ans