Chapitre 1

Nombres complexes

1.1 L'ensemble des nombres complexes

1.1.1 Exprimer les nombres complexes suivants sous la forme $a + b\,i$:

a) $(1+4i)+(2-3i)$

b) $(8+5i)+(-8-5i)$

c) $(1+i)-(2-6i)$

d) $(3-5i)+(-2-4i)-(1-2i)$

e) $3(5-2i)+2(7-i)-3(4-3i)$

f) $(9+5i)(2-7i)$

g) $(3+2i)(3-2i)$

h) $(3-4i)^2$

i) $(1+i)^4$

j) $\dfrac{1}{i}$

k) $\dfrac{1}{2+3i}$

l) $\dfrac{1+i}{1-i}$

m) $\dfrac{5+3i}{2+4i}$

n) $\left(\dfrac{63+16i}{4+3i}\right)^2$

1.1.2 Calculer i^0, i^1, i^2, i^3, i^4, ... En déduire une formule générale pour i^n, avec $n \in \mathbb{N}$.

1.1.3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

a) $2z-3+i=0$

b) $(1-4i)z=6-7i$

c) $(1+2i)z=(5-i)z+7+26i$

1.1.4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système d'équations ci-dessous :

$$\begin{cases} (2+i)z+(2-i)w &= 7-4i \\ (1+i)z-iw &= 2+i \end{cases}$$

1.1.5 Déterminer le conjugué des nombres complexes ci-dessous :

a) $z_1 = 5 - 4i$

b) $z_2 = -8 - i$

c) $z_3 = 2 + 3i$

d) $z_4 = 5 - \dfrac{3}{2}i$

1.1.6 Calculer $(7 - 8i)\overline{(8 - 7i)} - \overline{(4 + 3i)}(4 - 2i)$.

1.1.7 Poser $z = x + yi$ et résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

a) $8z + 5\bar{z} = 4 + 3i$

b) $z^2 + 2\bar{z} + 5 = 0$

c) $2\,\Im(\bar{z} + 1) + 2i\,\Re(-z + 2) = -1 - 12i$

1.1.8 Soit z un nombre complexe. Démontrer que

$$z + \bar{z} = 2\,\Re(z), \quad z - \bar{z} = 2\,\Im(z)\,i \quad \text{et} \quad z\bar{z} = \Re(z)^2 + \Im(z)^2$$

1.1.9 Montrer que si w est une solution de l'équation réelle $az^2 + bz + c = 0$, alors $\bar{w}$ en est une aussi.

1.2 Nombres complexes sous forme trigonométrique

1.2.1 Représenter les points A, B, ..., H dans le plan complexe après avoir calculé, si nécessaire, leurs affixes z_A, z_B, ..., z_H :

a) $z_A = 2 - i$

b) $z_B = -3 + 2i$

c) $z_C = z_A + z_B$

d) $z_D = z_A - z_B$

e) $z_E = \dfrac{z_A + \overline{z_A}}{2}$

f) $z_F = \dfrac{z_A - \overline{z_A}}{2}$

g) $z_G = -z_A$

h) $z_H = -\overline{z_A}$

1.2.2 Écrire les nombres complexes ci-dessous sous forme trigonométrique :

a) 1

b) i

c) -2

d) $-1 - i$

e) $-1 - \sqrt{3}i$

f) $3 + 4i$

1.2.3 Écrire les nombres complexes ci-dessous sous forme algébrique :

a) $\left[4; -\frac{\pi}{3}\right]$

b) $\left[\frac{3}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$

c) $[\pi; -\pi]$

d) $\left[4; \frac{\pi}{3}\right]$

e) $\left[1; -\frac{\pi}{2}\right]$

f) $e^{i\pi}$

1.2.4 Calculer :

a) $\left[2; \frac{\pi}{4}\right] \cdot \left[3; \frac{\pi}{6}\right]$

b) $\left[6; \frac{2\pi}{3}\right] : \left[3; -\frac{\pi}{3}\right]$

c) $\left[2; \frac{\pi}{3}\right]^3$

1.2.5 Calculer $z_1 \, z_2$ et z_1/z_2 en utilisant la forme trigonométrique :

a) $z_1 = -1 + i, \quad z_2 = 1 + i$

b) $z_1 = -2 - 2\sqrt{3}\, i, \quad z_2 = 5\, i$

c) $z_1 = 2\, i, \quad z_2 = -3\, i$

d) $z_1 = -10, \quad z_2 = -4$

1.2.6 Calculer le module $|z|$ des nombres complexes suivants :

a) $z = 2 + 3\, i$

b) $z = 1 + i$

c) $z = 2\, i$

d) $z = -3\, i$

e) $z = -1/2 + \sqrt{3}/2\, i$

f) $z = 5$

g) $z = -6$

h) $z = 0$

i) $z = \cos t + \sin t\, i$

1.2.7 Déterminer les formules de $\sin(4\theta)$ et $\cos(4\theta)$.

1.2.8 Déterminer :

a) la forme trigonométrique des nombres complexes z tel que $z^4 = 1 + i$,

b) la forme algébrique des nombres complexes z tel que $z^4 = 24i - 7$.

1.2.9 Déterminer sous forme trigonométrique et représenter dans le plan complexe :

a) les racines septièmes de l'unité,

b) les solutions de l'équation $z^5 = -32$.

1.2.10 Déterminer sous forme algébrique les racines carrées complexes des nombres ci-dessous :

a) 1

b) i

c) $-i$

d) -9

e) $3+4i$

f) $-5+12i$

1.2.11 Soit U l'ensemble des nombres complexes de module 1. Montrer que le produit, le conjugué et l'inverse d'éléments de U est encore dans U. Est-ce aussi vrai pour la somme, l'opposé et la racine n-ème d'éléments de U ?

1.3 Propriétés algébriques des nombres complexes

1.3.1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

a) $z^2 = 25$

b) $z^2 = -4$

c) $2z^2 + 10z + 17 = 0$

d) $z^2 + 3z - 5 = 0$

e) $z^2 - 3(1+i)z + 6 + 7i = 0$

f) $(1+2i)z^2 - (7+4i)z + 5 - 5i = 0$

1.3.2 Décomposer dans $\mathbb{R}[z]$ et $\mathbb{C}[z]$ les polynômes ci-dessous :

a) $z^4 - 1$

b) $z^4 + 1$

c) $z^3 + 1$

d) $z^6 - 1$

e) $z^3 - 6z^2 + 13z - 10$

f) $z^6 + 9z^4 + 27z^2 + 27$

1.3.3 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous :

a) $z^4 - (6+3i)z^3 + (8+12i)z^2 = 0$

b) $z^3 + 2z^2 + (-4+4i)z + 16 + 16i = 0$, sachant que -4 est un zéro

c) $z^3 - 4z^2 + (8+i)z - 7 + i = 0$, sachant que $1-i$ est un zéro

1.3.4 Démontrer que tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet au moins un zéro réel.

1.3.5 Soit l'équation

$$3\,z^3 + 2\,z^2 + 7\,z - 20 = 0$$

a) Vérifier que le nombre complexe $u = -1 + 2\,i$ est solution de l'équation ci-dessous.

b) Résoudre complètement l'équation ci-dessus dans $\mathbb{C}$.

c) En déduire une factorisation du polynôme

$$P(x) = 3\,x^3 + 2\,x^2 + 7\,x - 20$$

dans l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

1.3.6 On considère la fonction complexe f définie sur $\mathbb{C} - \{-i\}$ par

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

a) Déterminer le nombre complexe z tel que $f(z) = i$.

b) Trouver les éléments z invariants par f, c'est à dire l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) = z$.

1.4 Propriétés géométriques des nombres complexes

1.4.1 Dans le plan de Gauss, on désigne par A, B, C et D des points non alignés dont les affixes sont les nombres complexes z_A, z_B, z_C, z_D. Prouver que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si

$$z_A - z_B + z_C - z_D = 0$$

1.4.2 Écrire les équations des similitudes suivantes :

a) translation d'affixe $3 - 2i$,

b) homothétie de centre $(0; 0)$ et de rapport -2,

c) homothétie de centre $(3; -2)$ et de rapport 3,

d) rotation de centre $(0; 0)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$,

e) rotation de centre $(3; -1)$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$,

f) symétrie d'axe Oy,

g) symétrie dont l'axe a pour équation $x + y = 0$,

h) symétrie dont l'axe a pour équation $2x - y + 4 = 0$,

i) similitude directe laissant fixe $(0;0)$ et envoyant $P(4;-2)$ sur $P'(12;8)$,

j) similitude indirecte laissant fixe $(3;3)$ et envoyant $U(-2;5)$ sur $U'(0;4)$.

1.4.3 Démontrer que

a) la composition de deux similitudes directes est une similitude directe ;

b) la composition de deux similitudes indirectes est une similitude directe.

1.4.4 Caractériser géométriquement les similitudes d'équation :

a) $z' = -\bar{z}$

b) $z' = z + 3 - 2i$

c) $z' = i\bar{z} + 3$

d) $z' = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\, z$

e) $z' = (1+i)\, z + 1 - i$

f) $z' = i\bar{z} - 1 + i$

g) $z' = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\bar{z} + 4$

h) $z' = (0.6 + 0.8\, i)\bar{z} + \dfrac{2i-1}{\sqrt{5}}$

i) $z' = (1+\sqrt{3}i)\overline{z} + \sqrt{3} - i$

1.4.5 On donne les six points A, B, C, A', B', C' formant deux triangles ABC et $A'B'C'$ semblables. Déterminer l'équation de la similitude envoyant le triangle ABC sur le triangle $A'B'C'$ et la caractériser géométriquement :

a) $A(-2;-3)$, $B(2;-1)$, $C(4;1)$, $A'(0;3)$, $B'(7;4)$ et $C'(11;6)$;

b) $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(0;1)$, $A'(2;-1)$, $B'(1;0)$ et $C'(3;0)$.

1.4.6 Soit σ la similitude dont l'équation est $z' = (1-\sqrt{3}i)\bar{z} + 3 + 3\sqrt{3}i$.

a) Quelle est l'image par σ du point d'affixe $1+\sqrt{3}i$?

b) Soit μ la symétrie d'axe $y = \sqrt{3}x$. Donner son équation.

c) Donner l'équation de $\mu\circ\sigma$, puis décrire sa nature. En donner en particulier les points fixes.

1.5 Nombres complexes sous forme exponentielle

1.5.1 Démontrer les formules suivantes. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

a) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $|e^{i\theta}| = 1$ et $(e^{i\theta})^{-1} = e^{-i\theta}$

b) $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2\,i}$

1.5.2 Écrire sous forme polaire ($z = r \cdot e^{i\,\theta}$) les nombres complexes suivants :

a) $z_1 = 1 - i$
b) $z_2 = -1 + i$
c) $z_3 = i$
d) $z_4 = 1 + i\sqrt{3}$
e) $z_5 = -\sqrt{3} - i$

Note : $z = r \cdot e^{i\,\theta} = r \cdot \text{cis}(\theta)$

1.5.3 Écrire sous forme cartésienne ($z = a + ib$) les nombres complexes suivants :

a) $w_1 = 2e^{i\,\frac{\pi}{6}}$
b) $w_2 = 3e^{-2\,i\,\frac{\pi}{3}}$
c) $w_3 = e^{-i\,\frac{\pi}{6}}$
d) $w_4 = 3\,e^{i\,\pi}$
e) $w_5 = \sqrt{3}\,e^{i\,\frac{\pi}{4}}$
f) $w_6 = e^{i\,\pi}$

1.5.4 En utilisant la formule de Moivre, calculer $\cos(3\,\theta)$ et $\sin(3\,\theta)$.

1.5.5 En utilisant les formules d'Euler, linéariser $\cos^3(\theta)$ et $\sin^3(\theta)$.

1.5.6 Soit A, B, C et D quatre points du plan et z_A, z_B, z_C et z_D leur affixe respectif. Démontrer que la droite AB est perpendiculaire à la droite CD si et seulement si $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i \cdot \mathbb{R}^*$.

1.5.7 Calculer les racines cubiques de -8.

1.5.8 Soit $w = 1 + i\,\sqrt{3}$.

a) Calculer w^9
b) Calculer $\overline{w}^{\,-10}$

1.6 Solutions des exercices

1.1.1

a) $3+i$

b) 0

c) $-1+7i$

d) $-7i$

e) $17+i$

f) $53-53i$

g) $13+0i$

h) $-7-24i$

i) -4

j) $-i$

k) $\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$

l) i

m) $\frac{11}{10}-\frac{7}{10}i$

n) $119-120i$

1.1.2 On a $i^{4n}=1$, $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$, avec $n\in\mathbb{N}$.

1.1.3

a) $S=\left\{\frac{3}{2}-\frac{i}{2}\right\}$

b) $S=\{2+i\}$

c) $S=\{2-5i\}$

1.1.4 $z=3-i$ et $w=1-2i$

1.1.5

a) $\overline{z}_1=5+4i$

b) $\overline{z}_2=-8+i$

c) $\overline{z}_3=2-3i$

d) $\overline{z}_4=5+\frac{3}{2}i$

1.1.6 $102+5i$

1.1.7

a) $S=\left\{\frac{4}{13}+i\right\}$

b) $S=\left\{1\pm 2\sqrt{2}i\right\}$

c) $S=\left\{8+\frac{1}{2}i\right\}$

1.1.8 –

1.1.9 –

1.2.1 –

1.2.2

a) $[1; 0]$

b) $\left[1; \frac{\pi}{2}\right]$

c) $[2; \pi]$

d) $\left[\sqrt{2}; \frac{5\pi}{4}\right]$

e) $\left[2; \frac{4\pi}{3}\right]$

f) $[5; 53, 13]$

1.2.3

a) $2 - 2\sqrt{3}i$

b) $\frac{-3\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2}i}{8}$

c) $-\pi$

d) $2 + 2\sqrt{3}i$

e) $-i$

f) -1

1.2.4

a) $\left[6; \frac{5\pi}{12}\right]$

b) $[2; \pi]$

c) $[8; \pi]$

1.2.5

a) $z_1\, z_2 = -2, \quad z_1/z_2 = i$

b) $z_1\, z_2 = 10\,\sqrt{3} - 10\,i, \quad z_1/z_2 = -2\,\sqrt{3}/5 + 2/5\,i$

c) $z_1\, z_2 = 6, \quad z_1/z_2 = -2/3$

d) $z_1\, z_2 = 40, \quad z_1/z_2 = 5/2$

1.2.6

a) $\sqrt{13}$

b) $\sqrt{2}$

c) 2

d) 3

e) 1

f) 5

g) 6

h) 0

i) 1

1.2.7 $\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta)$,
$\sin(4\theta) = 4\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 4\cos(\theta)\sin^3(\theta)$.

1.2.8

a) $\left[\sqrt[8]{2}; \frac{\pi}{16}\right], \left[\sqrt[8]{2}; \frac{9\pi}{16}\right], \left[\sqrt[8]{2}; \frac{17\pi}{16}\right], \left[\sqrt[8]{2}; \frac{25\pi}{16}\right],$

b) $2 + i,\ -2 - i,\ 1 - 2i,\ -1 + 2i.$

1.2.9

a) $[1;0]$, $\left[1;\frac{2\pi}{7}\right]$, $\left[1;\frac{4\pi}{7}\right]$, $\left[1;\frac{6\pi}{7}\right]$, $\left[1;\frac{8\pi}{7}\right]$, $\left[1;\frac{10\pi}{7}\right]$, $\left[1;\frac{12\pi}{7}\right]$,

b) $\left[2;\frac{\pi}{5}\right]$, $\left[2;\frac{3\pi}{5}\right]$, $[2;\pi]$, $\left[2;\frac{7\pi}{5}\right]$, $\left[2;\frac{9\pi}{5}\right]$.

1.2.10

a) ± 1

b) $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

c) $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

d) $\pm 3i$

e) $\pm(2+i)$

f) $\pm(2+\ 3i)$

1.2.11 Vrai pour l'opposé et la racine n-ème, faux pour la somme.

1.3.1

a) $S=\{\pm 5\}$

b) $S=\{\pm 2i\}$

c) $S=\left\{\frac{-5}{2}\pm\frac{3}{2}i\right\}$

d) $S=\left\{\frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}\right\}$

e) $S=\{2-i;1+4i\}$

f) $S=\{3-i;-i\}$

1.3.2

a) $(z^2+1)(z+1)(z-1)$,
$(z+i)(z-i)(z+1)(z-1)$

b) $(z^2+\sqrt{2}z+1)(z^2-\sqrt{2}z+1)$,
$\left(z-\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(z-\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(z-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(z-\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$

c) $(z+1)(z^2-z+1)$,
$(z+1)\left(z-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$

d) $(z+1)(z^2-z+1)(z-1)(z^2+z+1)$,

$(z+1)\left(z-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)$

$(z-1)\left(z-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)$

e) $(z-2)(z^2-4z+5)$,
$(z-2)(z-2-i)(z-2+i)$

f) $(z^2+3)^3$,
$(z+\sqrt{3}i)^3(z-\sqrt{3}i)^3$

1.3.3

a) $S = \{0; 4; 2+3i\}$

b) $S = \{-4; 2i; 2-2i\}$

c) $S = \{1-i; 2-i; 1+2i\}$

1.3.4 –

1.3.5

a) –

b) $\mathcal{S} = \{-1+2\,i; -1-2\,i; 4/3\}$

c) $P(x) = (3\,x-4)\,(x^2+2\,x+5)$

1.3.6

a) -1

b) $z_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\,(1-i)$ et $z_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\,(1-i)$

1.4.1 –

1.4.2

a) $z' = z+3-2i$

b) $z' = -2z$

c) $z' = 3z-6+4i$

d) $z' = iz$

e) $z' = \dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{2}z+3-\sqrt{2}+(2\sqrt{2}-1)i$

f) $z' = -\bar{z}$

g) $z' = -i\bar{z}$

h) $z' = \dfrac{-3+4i}{5}\bar{z}+\dfrac{-16+8i}{5}$

i) $z' = \dfrac{8+14i}{5}z$

j) $z' = \dfrac{13-11i}{29}\bar{z}+\dfrac{81+159i}{29}$

1.4.3 –

1.4.4

a) symétrie d'axe Oy

b) translation de vecteur d'affixe $3-2i$

c) renversement sans point fixe : composition d'une translation d'affixe $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$ et d'une symétrie d'axe $2x-2y-3=0$

d) rotation de centre $(0;0)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

e) composition d'une rotation de centre $(1;1)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et d'une homothétie de centre $(1;1)$ et de rapport $\sqrt{2}$

f) symétrie d'axe $x-y+1=0$

g) renversement sans point fixe : composition d'une symétrie d'axe $(\sqrt{2}-1)x-y-2(\sqrt{2}-1)=0$ et d'une translation d'affixe $\sqrt{2}+2+\sqrt{2}i$

h) symétrie d'axe $2x-4y+\sqrt{5}=0$

i) composition d'une homothétie de centre $\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{3};-1\right)$ et de rapport 2 et d'une symétrie d'axe $\sqrt{3}x-3y-2=0$

1.4.5

a) $z'=\dfrac{3-i}{2}z+\dfrac{9+13i}{2}$, composition d'une rotation de centre $(2;-11)$ et d'angle -18.43 et d'une homothétie de centre $(2;-11)$ et de rapport $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$;

b) $z'=(-1+i)\bar{z}+(2-i)$, composition d'une d'une symétrie d'axe $(1-\sqrt{2})x-y+\sqrt{2}-1=0$ et d'une homothétie de centre $(1;0)$ et de rapport $\sqrt{2}$.

1.4.6

a) $1+\sqrt{3}i$ (c'est un point fixe)

b) $z'=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\bar{z}$

c) $z'=-2z+3+3\sqrt{3}i$, c'est une homothétie de centre $(1;\sqrt{3})$ et de rapport 2, le point fixe étant $(1;\sqrt{3})$.

1.5.1 –

1.5.2

a) $z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\,7\pi/4}$
b) $z_2 = \sqrt{2}\, e^{i\,3\pi/4}$
c) $z_3 = e^{i\,\pi/2}$
d) $z_4 = 2\, e^{i\,\pi/3}$
e) $z_5 = 2\, e^{i\,7\pi/6}$

1.5.3

a) $w_1 = \sqrt{3} + i$
b) $w_2 = -3/2 - 3\sqrt{3}/2\, i$
c) $w_3 = \sqrt{3}/2 - 1/2\, i$
d) $w_4 = -3$
e) $w_5 = \sqrt{6}/2 + \sqrt{6}/2\, i$
f) $w_6 = -1$

1.5.4 –

1.5.5 –

1.5.6 –

1.5.7 –

1.5.8

a) -512

b) $-w/2048 = \dfrac{e^{-2\pi/3\, i}}{1024}$