

# Chapitre 3

## Géométrie

### 3.1 La droite dans le plan

**3.1.1** On donne une droite  $d$  par l'équation paramétrique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

avec  $k \in \mathbb{R}$ . Représenter les points de  $d$  correspondant aux valeurs entières du paramètre  $k$  variant entre -2 et 2.

**3.1.2** Les points ci-dessous appartiennent-ils à la droite donnée par le système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 1 - 5k \\ y = 2 + 3k \end{cases}$$

avec  $k \in \mathbb{R}$ ?

$$(6; -1), (3; -2), (1; 0), \left(-6; \frac{31}{5}\right)$$

**3.1.3** On donne la droite d'équation paramétrique

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

avec  $k \in \mathbb{R}$ . Calculer les coordonnées du point de cette droite :

- a) situé sur  $Ox$ ,
- b) situé sur  $Oy$ ,
- c) qui a une abscisse égale à 7,
- d) qui a une ordonnée égale à -2,
- e) dont les deux coordonnées sont égales,
- f) situé sur la droite  $\begin{cases} x = 1 + l \\ y = -5 - 8l \end{cases}$ , avec  $l \in \mathbb{R}$ .

**3.1.4** Trouver une équation paramétrique de la droite donnée par :

- a)  $A(3; 5)$  et un vecteur directeur  $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,
- b)  $A(-3; -2)$  et  $B(4; -5)$ ,
- c)  $A(2; -4)$ , de pente  $-\frac{3}{4}$ ,
- d)  $A(5; 2)$ , parallèle au segment BC, où  $B(1; 1)$  et  $C(-3; 2)$ ,
- e)  $A(-7; 10)$ , perpendiculaire au vecteur  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,
- f)  $A(0; -2)$ , horizontale,
- g)  $A(8; 12)$ , verticale.

**3.1.5** Les points ci-dessous appartiennent-ils à la droite d'équation cartésienne

$$3x - 8y + 2 = 0?$$

$$\left(0; \frac{1}{4}\right), \left(-\frac{2}{3}; 0\right), (5; -1), (2; 1)$$

**3.1.6** On donne la droite d'équation cartésienne  $-3x + 2y - 6 = 0$ . Calculer les coordonnées du point de cette droite :

- a) d'abscisse 3,
- b) d'ordonnée  $-4$ ,
- c) dont les deux coordonnées sont égales,
- d) situé sur  $Ox$ ,
- e) situé sur  $Oy$ ,
- f) situé sur la droite d'équation cartésienne  $5x - 7y + 4 = 0$ .

**3.1.7** Déterminer l'équation cartésienne de chacune des droites de l'exercice [3.1.4](#).

**3.1.8** Déterminer les équations cartésiennes des médianes du triangle dont les sommets sont  $A(3; -2)$ ,  $B(-3; 2)$ ,  $C(0; -1)$ , ainsi que les coordonnées de son centre de gravité.

**3.1.9** Dessiner les droites données par leurs équations cartésiennes :



**3.1.16**

- Déterminer l'équation cartésienne de la parallèle  $d_1$  à  $Ox$  passant par  $A(2; 2)$ .
- Déterminer l'équation cartésienne de la parallèle  $d_2$  à  $Oy$  passant par  $B(6; -4)$ .
- Déterminer l'équation cartésienne de la droite  $d_3$  passant par  $P(1; 2)$  et par le milieu du segment d'extrémités  $A$  et  $B$ .
- Calculer l'aire du triangle formé par les droites  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$ .

**3.1.17** Déterminer l'équation cartésienne de la droite qui passe par  $A(2; -3)$  et qui est perpendiculaire à :

- $3x - 7y + 3 = 0$
- $x + 9y = 11$
- $16x = 24y - 7$
- $2x + 3 = 0$
- $3y = 1$

**3.1.18** Calculer les coordonnées de la projection orthogonale du point  $P(-6; 4)$  sur la droite  $d$  d'équation  $4x = 5y - 3$ .

**3.1.19** Calculer les coordonnées du symétrique du point  $P(-5; 13)$  relativement à la droite  $d : 3y + 3 = 2x$ .

**3.1.20** Déterminer les équations cartésiennes des hauteurs du triangle de sommets  $A(2; 1)$ ,  $B(-1; -1)$ ,  $C(3; 2)$ , ainsi que les coordonnées de son orthocentre.

**3.1.21** Déterminer l'équation cartésienne de la médiatrice d'un segment  $[AB]$  si l'on donne  $A(2; -3)$  et  $B(-5; -2)$ .

**3.1.22** Déterminer les équations cartésiennes des médiatrices du triangle de sommets  $A(1; 8)$ ,  $B(3; 4)$ ,  $C(-6; 1)$ , ainsi que les coordonnées du centre et le rayon de son cercle circonscrit.

**3.1.23** On donne les équations de deux côtés et d'une diagonale d'un rectangle :  $x = 2y$ ,  $2y - x = 15$  et  $7x + y = 15$ . Calculer les coordonnées de ses sommets.

**3.1.24** D'un triangle  $ABC$ , on donne l'équation du côté  $AB : 5x - 3y + 2 = 0$ , celle de la hauteur issue de  $A$   $h_A : 4x = 3y - 1$  ainsi que celle de la hauteur issue de  $B$   $h_B : 7x + 2y = 22$ . Calculer les coordonnées du point  $C$ .

**3.1.25** Déterminer les équations cartésiennes des côtés d'un triangle  $ABC$  connaissant  $C(4; -1)$ , ainsi que les équations d'une hauteur  $h : 2x = 3y - 12$  et d'une médiane  $m : 2x + 3y = 0$  issues d'un même sommet.

**3.1.26** Déterminer les équations cartésiennes des côtés d'un triangle  $ABC$  connaissant  $B(5; -5)$ , ainsi que les équations d'une hauteur  $h : 3x - 4y + 27 = 0$  et d'une bissectrice  $b : 2x - y + 5 = 0$  issues de sommets différents.

**3.1.27** Deux droites  $d_1$  et  $d_2$  sont données par leurs équations. Déterminer si elles sont concourantes, parallèles ou confondues et, selon les cas, leur point commun ou leur pente commune :

- |                               |                         |
|-------------------------------|-------------------------|
| a) $d_1 : 3x - 5y + 7 = 0$    | $d_2 : 2x - 4y - 8 = 0$ |
| b) $d_1 : -4x + 20y + 36 = 0$ | $d_2 : x - 5y = 9$      |
| c) $d_1 : -7x - 8y + 2 = 0$   | $d_2 : 4x - 3y + 4 = 0$ |
| d) $d_1 : 8x - 2y + 36 = 0$   | $d_2 : y = 4x + 25$     |

**3.1.28** Prouver que les quatre droites :  $a : 2x + y = 3$ ,  $b : x = 3y - 1$ ,  $c : 3x + 5y - 7 = 0$  et  $d : 4x - 5y = 1$  sont concourantes en un point.

**3.1.29** Soit  $d_1 : (a-1)x + (3a-1)y + (4a-4) = 0$  et  $d_2 : (2a-2)x + (2a-1)y + (4a-7) = 0$  des droites. Existe-t-il des valeurs de  $a$  telles que  $d_1$  et  $d_2$  soient

- confondues,
- parallèles,
- perpendiculaires ?

## 3.2 Questions métriques dans le plan

**3.2.1** Déterminer l'équation cartésienne de la droite passant par  $A(-1; -5)$  et d'angle directeur  $120^\circ$ .

**3.2.2** Calculer l'angle aigu déterminé par les droites suivantes :

- |                        |                         |
|------------------------|-------------------------|
| a) $d_1 : 5x - y = 7$  | $d_2 : 3x + 2y = 0$     |
| b) $d_1 : 2y = 3x + 7$ | $d_2 : 2x + 3y = 5$     |
| c) $d_1 : x = 2y + 4$  | $d_2 : 2x - 4y + 3 = 0$ |
| d) $d_1 : 3x + 2y = 1$ | $d_2 : 5x = 2y - 3$     |

**3.2.3** Déterminer l'équation cartésienne de la droite  $d_1$  passant par  $M(2; 1)$  et déterminant avec la droite  $d_2 : 2x + 3y + 4 = 0$  un angle  $\angle(d_1; d_2) = -45^\circ$ .

**3.2.4** Un rayon lumineux parcourt la droite  $d : x = 2y - 5$ , et il se réfléchit sur la droite  $e : 2y = 3x + 7$ . Quelle est l'équation cartésienne du rayon réfléchi ?

**3.2.5** Calculer la distance du point  $P$  à la droite  $d$  dans les cas suivants :

- |               |                        |
|---------------|------------------------|
| a) $P(2; -1)$ | $d : 4x + 3y + 10 = 0$ |
| b) $P(0; -3)$ | $d : 5x = 12y + 23$    |
| c) $P(-2; 3)$ | $d : 4y = 3x - 2$      |
| d) $P(1; -2)$ | $d : x = 2y + 5$       |

**3.2.6** Calculer l'aire d'un carré dont l'un des sommets est  $A(2; -5)$  et dont l'un des côtés a pour support la droite  $d : x = 2y + 7$ .

**3.2.7** Un triangle  $ABC$  est déterminé par les équations de ses côtés :  $AB : x + y + 1 = 0$ ,  $BC : x + 3y + 3 = 0$  et  $AC : 2x + 3y = 0$ . Calculer la longueur de sa hauteur issue de  $C$ .

**3.2.8** Quelles sont les équations cartésiennes des droites situées à une distance de 6 de la droite  $d : 6x - 8y + 5 = 0$  ?

**3.2.9** Le point  $A(-5; 0)$  est le sommet d'un rectangle  $ABCD$  d'aire 20 dont le côté  $BC$  est porté par la droite  $d : 3x - 4y - 5 = 0$ . Déterminer les équations cartésiennes des côtés  $AB$ ,  $AD$  et  $CD$ .

**3.2.10** Trouver les points équidistants des points  $A(0; 1)$  et  $B(2; 5)$ , qui sont situés à une distance de 2 de la droite  $d : 3x - 4y - 4 = 0$ .

**3.2.11** Calculer la distance entre les deux droites parallèles  $d_1 : 3x + 4y - 13 = 0$  et  $d_2 : 3x + 4y - 3 = 0$ , puis déterminer l'équation cartésienne de la droite équidistante de  $d_1$  et  $d_2$ .

**3.2.12** Déterminer l'équation cartésienne de la bissectrice de l'angle déterminé par les droites d'équation  $2x = 3y + 5$  et  $4y = 6x + 7$  qui coupe  $Ox$  dans sa partie négative.

**3.2.13** Déterminer l'équation cartésienne de la bissectrice de l'angle aigu déterminé par les droites d'équation  $3x + 4y = 5$  et  $12y = 5x + 3$ .

**3.2.14** Déterminer l'équation cartésienne de la bissectrice déterminé par les droites d'équation  $x = 3y - 5$  et  $y = 3x + 15$  et qui passe par le point  $J(-1; -4)$ .

**3.2.15** Déterminer les équations cartésiennes des droites passant par  $P(2; -1)$  et qui forment avec les droites d'équation  $y = 2x + 5$  et  $3x + 6y = 1$  des triangles isocèles en l'intersection de ces droites.

**3.2.16** Un triangle  $ABC$  est déterminé par les équations de ses côtés :  $AB : 4x + 3y + 24 = 0$ ,  $BC : 3x = 4y$  et  $AC : 3x + 4y = 12$ . Calculer les coordonnées du centre du cercle exinscrit du triangle dont le centre se trouve sur la bissectrice intérieure issue de  $C$ .

### 3.3 Le cercle

**3.3.1** Indiquer, parmi les équations données ci-dessous, celles qui définissent un cercle. Déterminer alors les coordonnées du centre et le rayon du cercle :

a)  $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 25$

g)  $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 5 = 0$

b)  $(x + 2)^2 + y^2 = 64$

h)  $x^2 + y^2 + x = 0$

c)  $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 0$

i)  $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 14 = 0$

d)  $x^2 + (y - 5)^2 = 5$

j)  $x^2 + y^2 + y = 0$

e)  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$

k)  $80x^2 + 80y^2 - 120x + 80y + 17 = 0$

f)  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$

l)  $144x^2 + 144y^2 - 216x + 192y = -145$

**3.3.2** Déterminer l'équation des cercles définis par les conditions suivantes :

a) Le centre est l'origine et le rayon est égal à 3.

b) Le centre est  $C(2; -3)$  et le rayon est égal à 7.

c) Le cercle passe par l'origine et son centre est  $C(6; -8)$ .

d) Le cercle passe par  $A(2; 6)$  et son centre est  $C(-1; 2)$ .

e) Les points  $A(3; 2)$  et  $B(-1; 6)$  sont les extrémités d'un diamètre.

- f) Le centre est l'origine et le cercle est tangent à  $d : 3x - 4y + 20 = 0$ .
- g) Le centre est  $C(1; -1)$  et le cercle est tangent à  $d : 5x + 9 = 12y$ .
- h) Le cercle passe par  $A(3; 1)$  et par  $B(-1; 3)$  et son centre est sur  $d : 3x = y + 2$ .
- i) Le cercle passe par  $A(1; 1)$ , par  $B(1; -1)$  et par  $C(2; 0)$ .

**3.3.3** Déterminer la position relative des deux objets suivants :

- a) la droite  $y = 2x - 3$  et le cercle  $x^2 + y^2 - 3x + 2y = 3$  ;
- b) la droite  $x - 2y - 1 = 0$  et le cercle  $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$  ;
- c) la droite  $y = x + 10$  et le cercle  $x^2 + y^2 = 1$ .

**3.3.4** Déterminer la position relative des cercles

$$\gamma_1 : x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_2 : x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$$

**3.3.5** Déterminer l'équation du diamètre du cercle  $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 17$  qui est perpendiculaire à la droite  $5x + 2y = 13$ .

**3.3.6** Calculer la plus courte distance d'un point du cercle  $x^2 + y^2 - 26x + 30y = -313$  au point  $B(3; 9)$ .

**3.3.7** Déterminer l'équation du diamètre du cercle  $\gamma : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$  qui passe par le point milieu de la corde de support  $d : 2x + y = 13$ .

**3.3.8** Calculer la longueur de la corde commune aux cercles  $\gamma_1 : x^2 + y^2 = 10x + 10y$  et  $\gamma_2 : x^2 + y^2 + 6x + 2y = 40$ .

**3.3.9** Déterminer les équations des cercles qui ont leur centre sur la droite  $4x - 5y = 3$  et qui sont tangents aux deux droites  $2x = 3y + 10$  et  $2y = 3x + 5$ .

**3.3.10** Déterminer l'équation du cercle qui, ayant son centre sur la droite  $2x + y = 0$ , est tangent aux droites  $3y = 4x + 10$  et  $4x = 3y + 30$ .

**3.3.11** Déterminer les équations des cercles de rayon  $\sqrt{5}$  qui sont tangents à la droite  $x - 2y = 1$  au point  $T(3; ?)$ .

**3.3.12** Déterminer les équations des cercles tangents aux droites

$$y = 7x - 5 \quad \text{et} \quad x + y + 13 = 0$$

l'un des points de contact étant  $T(1; 2)$ .

**3.3.13** Déterminer les équations des cercles passant par l'origine et qui sont tangents aux droites  $x + 2y = 9$  et  $y = 2x + 2$ .

**3.3.14** Déterminer les équations des cercles tangents aux trois droites  $3y = 4x - 10$ ,  $3x = 4y + 5$  et  $3x - 4y = 15$ .

**3.3.15** Déterminer l'équation du symétrique du cercle  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$  relativement à la droite  $x = y + 3$ .

**3.3.16** Après avoir vérifié que le point  $T$  est sur le cercle  $\gamma$ , Déterminer les équations des tangentes à  $\gamma$  au point  $T$  dans les cas suivants :

- a)  $T(-1; 2)$  et  $\gamma : x^2 + y^2 = 5$ ;
- b)  $T(-5; 7)$  et  $\gamma : (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ ;
- c)  $T(0; 0)$  et  $\gamma : x^2 + y^2 = 3x - 7y$ ;
- d)  $T(-1; 2)$  et  $\gamma : x^2 + y^2 - 2x + 6y = 19$ ;
- e)  $T(2; 3)$  et  $\gamma : 2x^2 + 2y^2 = x + 4y + 12$ ;
- f)  $T(2; 1)$  et  $\gamma : 3x^2 + 3y^2 = 2x + 11$ .

**3.3.17** Calculer la valeur de l'angle<sup>1</sup> aigu formé par la droite  $3x - y = 1$  et le cercle  $(x - 2)^2 + y^2 = 5$ .

**3.3.18** Calculer l'angle<sup>2</sup> sous lequel se coupent les cercles  $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8$  et  $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$ .

**3.3.19** Déterminer les équations des tangentes au cercle  $x^2 + y^2 + 10x = 2y - 6$ , de direction donnée par la droite  $2x + y = 7$ .

---

1. L'angle d'une droite et d'un cercle est l'angle formé par la droite et la tangente au cercle en l'un des points d'intersection

2. L'angle de deux cercles est l'angle formé par les tangentes aux cercles en l'un des points d'intersection

**3.3.20** Former les équations des tangentes au cercle  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ , qui sont perpendiculaires à la droite  $x = 2y + 345$ .

**3.3.21** Déterminer les équations des tangentes au cercle  $x^2 + y^2 = 19 - 2x$  issues du point  $A(1; 6)$ , ainsi que les coordonnées du point de contact.

**3.3.22** Déterminer les équations des tangentes au cercle  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$  issues du point  $A(6; 5)$ , ainsi que les coordonnées des deux points de contact.

**3.3.23** On mène par le point  $A(4; 2)$  les tangentes au cercle  $x^2 + y^2 = 10$ . Calculer l'angle entre ces tangentes.

**3.3.24** On mène par le point  $A(4; -4)$  les tangentes au cercle  $x^2 + y^2 = 6x - 2y - 5$ . Calculer la longueur de la corde passant par les points de tangence.

## 3.4 La droite dans l'espace

**3.4.1** On donne les droites  $d_1 : \frac{x-1}{2} = y+4 = \frac{z}{5}$  et

$$d_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

avec  $k \in \mathbb{R}$ . Les points  $A(3; -3; 5)$  et  $B(-1/2; 3/2; 2)$  appartiennent-ils à ces droites ?

**3.4.2** On donne la droite d'équation paramétrique  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ ,

avec  $k \in \mathbb{R}$ . Calculer les coordonnées du point de cette droite :

- situé sur  $Ox$ ,
- qui a une ordonnée égale à 5,
- dont l'abscisse et la cote sont égales,

d) situé sur la droite  $\begin{cases} x = -7 + l \\ y = -l \\ z = -1 + 2l \end{cases}$ , avec  $l \in \mathbb{R}$ .

**3.4.3** Déterminer une équation paramétrique de la droite :

- a) qui passe par  $A(1; 2; 3)$  et a pour vecteur directeur  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  
 b) qui passe par  $A(2; 3; 5)$  et  $B(1; 5; 7)$ ,  
 c) qui passe par  $A(-3; 5; 2)$  et est parallèle à l'axe  $Oz$ ,  
 d) qui passe par  $A(8; 6; -12)$  et est parallèle au segment  $BC$ , avec  $B(4; 0; -2)$  et  $C(5; -2; 3)$ .

**3.4.4** Montrer que les équations suivantes définissent toutes la même droite :

$$\begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 3 + 2k \\ z = -2 + 4k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}, \text{ avec } u \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} 16x - 2y - 11z = 0 \\ 14x - y - 10z - 3 = 0 \end{cases} \quad \frac{x+1}{6} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+2}{8}$$

**3.4.5** Deux droites  $d_1$  et  $d_2$  sont données par leurs équations. Déterminer si elles sont concourantes, parallèles, confondues ou gauches et, selon les cas, leur éventuel point commun :

a)  $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = -2 - 5k \\ z = 5 + k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad d_2 : \begin{cases} x = -2 - 6n \\ y = 3 + 10n \\ z = 4 - 2n \end{cases}, \text{ avec } n \in \mathbb{R}$

b)  $d_1 : \begin{cases} x = 2 - 5k \\ y = 3 + 2k \\ z = 5 - 4k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad d_2 : \begin{cases} x = 2 - 5n \\ y = 3 - 2n \\ z = 5 - 4n \end{cases}, \text{ avec } n \in \mathbb{R}$

c)  $d_1 : \frac{x-7}{2} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z-3}{3} \quad d_2 : \begin{cases} x = 6 + 4k \\ y = -1 - 12k \\ z = 5 - 5k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}$

d)  $d_1 : \begin{cases} x + y = 4 \\ 2y + z = 5 \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x + 3y + z = 9 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$

## 3.5 Le plan dans l'espace

**3.5.1** On donne les plans  $\alpha : 2x + 3y - 3z - 5 = 0$  et

$$\beta : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Les points  $A(-2; 7; 8)$  et  $B(4; 3/2; 5/2)$  appartiennent-ils à ces plans ?

**3.5.2** Déterminer une équation paramétrique du plan  $\alpha$  :

a) qui passe par  $A(1; -2; 3)$  et a pour vecteurs directeurs

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b) qui passe par les points  $A(2; 5; 1)$ ,  $B(-1; 7; 0)$  et qui est parallèle au vecteur

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) qui passe par  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(5; 2; 1)$  et  $C(2; 5; 2)$ ,

d) qui passe par  $A(5; 2; -2)$  et est parallèle au plan  $Oxy$ ,

**3.5.3** Montrer que les équations suivantes définissent toutes le même plan :

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda - 3\mu \\ y = 5 - \lambda + 2\mu \\ z = 1 + \lambda - \mu \end{cases}, \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad 3x + 3z = 39 - 6y$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

**3.5.4** Calculer les composantes d'un vecteur normal à chacun des plans suivants :

a)  $2x - y - 2z + 5 = 0$

b)  $x + 5y - z = 0$

c)  $3x - 2y - 7 = 0$

d)  $5y - 3z = 0$

e)  $x + 2 = 0$

f)  $3y + 5 = 0$

**3.5.5** Déterminer l'équation cartésienne du plan  $\alpha$  :

a) qui passe par  $P(2; 1; -1)$  et est normal au vecteur  $(1; -2; 3)$ ;

b) qui passe par  $P(-6; 10; 16)$  et est perpendiculaire à la droite

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

avec  $k \in \mathbb{R}$ ;

c) qui passe par l'origine et est perpendiculaire au segment  $AB$ , avec

$$A(1; 0; 5) \quad \text{et} \quad B(3; -3; 8);$$

d) qui passe par  $P(1; -2; 4)$  et est parallèle au plan d'équation  $5x + 2y - z + 5 = 0$ .

**3.5.6** Déterminer l'équation cartésienne de chacun des plans de l'exercice 3.5.2.

**3.5.7** Déterminer l'équation cartésienne du plan qui passe par  $A(2; -1; 1)$  et qui est perpendiculaire aux plans d'équation  $2x - z + 1 = 0$  et  $y = 0$ .

**3.5.8** Déterminer l'équation cartésienne du plan qui passe par  $A(1; -1; 2)$ , par  $B(3; 1; 1)$  et qui est perpendiculaire au plan  $x - 2y + 3z - 5 = 0$ .

**3.5.9** Déterminer une équation paramétrique de la normale au plan d'équation  $6x - 3y + 5z + 2 = 0$  issue du point  $P(2; -3; -5)$ .

**3.5.10** Former l'équation cartésienne du plan qui passe par  $M(1; 2; -3)$  et qui est parallèle aux droites

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

avec  $k, l \in \mathbb{R}$ .

**3.5.11** Déterminer l'équation cartésienne du plan contenant le point  $M(2; -2; 1)$  et la droite

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = 2 - 3k \\ z = -3 + 2k \end{cases}$$

avec  $k \in \mathbb{R}$ .

**3.5.12** Une droite et un plan sont donnés par leurs équations. Déterminer si ils sont concourants, parallèles ou inclus l'un dans l'autre et, selon les cas, leur intersection.

a)  $d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$        $\alpha : 2x + y - z + 15 = 0$

b)  $d : x - 1 = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z}{6}$        $\alpha : 2x + 3y + z - 1 = 0$

c)  $d : \begin{cases} x + y - 3z = 3 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$        $\alpha : x + 2y - 4z - 4 = 0$

**3.5.13** Deux plans sont donnés par leurs équations. Déterminer s'ils sont concourants, parallèles ou confondus et, selon les cas, leur intersection.

a)  $\alpha : 3x - 2y + 5z - 4 = 0$                        $\beta : 3x + 2y + 5z - 4 = 0$

b)  $\alpha : 3x - 2y + 5z - 4 = 0$                        $\beta : \begin{cases} x = 4 + 2k + 5n \\ y = 2 + 3k \\ z = -3n \end{cases}, \text{ avec } k, n \in \mathbb{R}$

c)  $\alpha : \begin{cases} x = 1 + 3k - 2n \\ y = 1 - k + n \\ z = 3 + k - n \end{cases}, \text{ avec } k, n \in \mathbb{R}$        $\beta : \begin{cases} x = 2 + p + 5q \\ y = 2 - 2q \\ z = 2 + 2q \end{cases}, \text{ avec } p, q \in \mathbb{R}$

**3.5.14** Calculer les coordonnées du point d'intersection des plans  $x - 2y + z - 7 = 0$ ,  $2x + y - z + 2 = 0$  et  $x - 3y + 2z - 11 = 0$ .

**3.5.15** Démontrer que les plans d'équations  $7x + 4y + 7z + 1 = 0$ ,  $2x - y - z + 2 = 0$  et  $x + 2y + 3z - 1 = 0$  ont une droite commune dont on donnera les équations cartésiennes.

## 3.6 Problèmes métriques dans l'espace

**3.6.1** Calculer l'angle aigu déterminé par les droites d'équations :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \text{ avec } m \in \mathbb{R}$$

**3.6.2** Calculer l'angle aigu déterminé par les plans  $\alpha$  et  $\beta$  :

a)  $\alpha : 3y - z = 0$                                        $\beta : 2y + z = 0$

b)  $\alpha : \begin{cases} x = 5 + 4\lambda - \mu \\ y = -7 + 1\lambda + 2\mu \\ z = 11 + 3\lambda + 5\mu \end{cases}, \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\beta : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } u, v \in \mathbb{R}$

**3.6.3** Calculer l'angle aigu entre la droite  $d : \begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = 5k \\ z = -3 + k \end{cases}$  avec  $k \in \mathbb{R}$ , et le plan  $\alpha : 2x + 3y + 4z = 0$ .

**3.6.4** Calculer la distance du point  $P$  à la droite  $d$  dans les cas suivants :

a)  $P(-5; 4; -2)$        $d : \begin{cases} x = 3 - 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = k - 1 \end{cases}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ ,

b)  $P(5; -2; 1)$        $d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ .

**3.6.5** Vérifier que les droites d'équations  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ , et  $\frac{x-3}{3} = \frac{y}{6} = \frac{1-z}{9}$  sont parallèles et calculer la distance qui les sépare.

**3.6.6** Calculer la distance des droites  $a$  et  $b$  lorsque :

a)  $a : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$        $b : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ , avec  $n \in \mathbb{R}$

b)  $a : \frac{x-3}{-6} = y+1 = \frac{z-4}{2}$        $b : \begin{cases} x = 6 - 4k \\ y = k - 4 \\ z = k + 1 \end{cases}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$

**3.6.7** Considérons les droites concourantes  $d_1$  et  $d_2$  données ci-dessous :

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 3 + 3k \\ z = -1 + 2k \end{cases}, \text{ avec } k \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 2n \\ y = 4 - n \\ z = 2 - 3n \end{cases}, \text{ avec } n \in \mathbb{R}$$

Déterminer les équations paramétriques de leurs bissectrices  $b_1$  et  $b_2$ .

**3.6.8** Calculer la distance du point  $P$  au plan  $\alpha$  dans les cas suivants :

a)  $P(-8; 7; 0)$        $\alpha : 2x - 2y + z + 6 = 0$ ,

b)  $P(6; 1; -2)$        $\alpha : \begin{cases} x = 3 - 4\lambda + 8\mu \\ y = 2 - 3\lambda + 2\mu \\ z = 1 + 3\lambda + 6\mu \end{cases}$ , avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

**3.6.9** Vérifier que les plans d'équations  $3x + 12y - 4z = 18$  et  $-6x - 24y + 8z - 146 = 0$  sont parallèles et calculer la distance qui les sépare.

**3.6.10** Trouver les équations des plans situés à une distance 6 du plan d'équation

$$\alpha : 9x + 2y - 6z - 8 = 0$$

**3.6.11** Déterminer les équations des plans bissecteurs des plans  $\alpha : 3x + 6z = 2y + 20$  et  $\beta : z + 2 = 0$ .

**3.6.12** Calculer les coordonnées des points de la droite d'équation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

qui sont équidistants des plans  $\alpha$  et  $\beta$  d'équations respectives

$$6x - y - 2z + 3 = 0 \quad \text{et} \quad 3x + 4y = 4z + 9$$

**3.6.13** Déterminer les points d'abscisse 2 équidistants des points

$$A(-1; 5; 4) \quad \text{et} \quad B(1; -1; -2)$$

qui sont situés à une distance de 3 du plan  $Oxz$ .

## 3.7 La sphère

**3.7.1** Indiquer, parmi les équations données ci-dessous, celles qui définissent une sphère. Déterminer alors les coordonnées du centre et le rayon de la sphère :

- $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 9$
- $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 2y + 6z + 56 = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 + 4x = 14y + 8z - 69$
- $36x^2 + 36y^2 + 36z^2 - 108x + 96y + 109 = 144z$

**3.7.2** Déterminer l'équation des sphères définies par les conditions suivantes :

- le centre est  $C(0; 2; -4)$  et le rayon est égal à 5,
- le centre est  $C(1; -2; 4)$  et elle passe par le point  $P(3; 2; -1)$ ,
- l'un de ses diamètres est  $[AB]$ , où  $A(-1; 0; 5)$  et  $B(7; 4; -7)$ ,
- elle passe par les points  $A(4; 2; -3)$  et  $B(-1; 3; 1)$ , et a son centre sur la droite  $d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$
- elle est centrée à l'origine et tangente à la droite d'équation  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ ,
- le centre est  $C(4; 1; -5)$  et elle est tangente au plan d'équation  $x + 2y + 2z = 4$ ,
- elle passe par les points  $M(0; 3; -4)$ ,  $N(2; 2; -3)$  et  $P(10; 1; -8)$ , et son rayon vaut  $5\sqrt{2}$ ,
- elle passe par les points  $R(-2; 2; 3)$ ,  $S(0; 4; 1)$  et  $T(-5; 5; -1)$ , et a son centre sur le plan d'équation  $x + 3y = 2z + 7$ ,
- elle passe par les quatre points  $E(5; 7; -2)$ ,  $F(3; 1; 0)$ ,  $G(-5; 12; 3)$  et  $H(-3; -2; -1)$ ,
- elle passe par les points  $M(8; 8; 9)$ ,  $N(-1; -1; 9)$  et  $P(11; 5; 9)$ , et est tangente au sol.

**3.7.3** Déterminer la position relative de la sphère  $\Sigma : (x - 3)^2 + (y - 5)^2 + (z - 10)^2 = 25$  et de la droite  $d : \frac{x - 7}{6} = \frac{y + 4}{-6} = z - 5$ .

**3.7.4** Le système d'équations  $\begin{cases} (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 100 \\ 2x - 2y - z + 9 = 0 \end{cases}$  détermine-t-il un cercle? Si oui, calculer les coordonnées du centre  $C$  et le rayon  $r$  de ce cercle.

**3.7.5** Montrer que les deux sphères d'équations :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 81 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 12y + 6z + 45 = 0$$

sont tangentes intérieurement et déterminer l'équation cartésienne de leur plan tangent commun.

**3.7.6** On donne la sphère  $\Sigma$  et le point  $T$ . Après avoir vérifié que  $T$  appartient à  $\Sigma$ , trouver l'équation cartésienne du plan tangent à  $\Sigma$  au point  $T$  :

- a)  $\Sigma : (x + 3)^2 + (y - 15)^2 + (z - 2)^2 = 225$   $T(7; 4; 4)$  ,  
 b)  $\Sigma : (x - 2)^2 + (y + 4)^2 + (z - 3)^2 = 289$   $T(14; 4; -6)$  ,  
 c)  $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 10y + 6z = 27$   $T(-2; 12; -5)$  ,  
 d)  $\Sigma : 49x^2 + 49y^2 + 49z^2 + 42y + 34 = 70x + 294z$   $T\left(3; -1; \frac{8}{7}\right)$ .

**3.7.7** On donne la sphère  $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 = 216$ , ainsi que la droite

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

Déterminer les équations cartésiennes des plans perpendiculaires à  $d$  et tangents à  $\Sigma$ , ainsi que les coordonnées des points de contact de ces plans avec  $\Sigma$ .

**3.7.8** On donne la sphère  $\Sigma : (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 169$  et le plan  $\alpha : 12x + 4y + 3z - 12 = 0$ . Déterminer les équations cartésiennes des plans parallèles à  $\alpha$  et tangents à  $\Sigma$ , ainsi que les coordonnées des points de contact de ces plans avec  $\Sigma$ .

**3.7.9** Un rayon lumineux issu de  $A(5; 1; 2)$  est réfléchi d'abord sur le plan  $\alpha$  d'équation  $3x + y + 4z + 2 = 0$ , le point d'incidence étant  $R(1; 3; ?)$ , puis sur la sphère de centre  $M(6; 13; 6)$  et de rayon  $\sqrt{24}$ .

- a) Déterminer les équations paramétriques des deux rayons réfléchis.  
 b) Déterminer la distance entre le rayon incident et le deuxième rayon réfléchi.

**3.7.10** On donne les points  $A(2; 9; 6)$  et  $B(8; 1; 10)$  ainsi que la droite

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

- a) Calculer les coordonnées du centre et le rayon de la sphère passant par  $A$  et  $B$  et dont le centre est sur  $d$ .  
 b) La sphère coupe-t-elle le plan d'équation  $6x + 3y - 2z + 25 = 0$ ?  
 c) Quelle est, sur la sphère, la plus courte distance entre  $A$  et  $B$ ?  
 d) Déterminer une équation paramétrique d'un axe de rotation laissant la sphère invariante et qui échange les points  $A$  et  $B$ .

**3.7.11** Un cône de révolution a pour sommet  $S(0; 0; 0)$  et son axe passe par  $A(1; 1; -1)$ . Le cercle de base du cône passe par  $Q(0; 6; -18)$ .

- a) Calculer le demi-angle d'ouverture du cône.
- b) Calculer la longueur de la hauteur du cône.
- c) Déterminer l'équation cartésienne de la sphère qui est tangente intérieurement au cône en le point  $Q$ .

**3.7.12** On donne les plans  $\alpha : 8x + y - 4z = 9$  et  $\beta : 6x + 3y - 2z = 5$ , ainsi que le point  $P(2; -3; ?)$  de  $\alpha$ . Déterminer l'équation des sphères tangentes à  $\alpha$  en  $P$  et tangentes à  $\beta$ .

**3.7.13** On considère la famille de droites  $d_k$  passant par  $M(3; 3; 0)$  et de vecteur directeur  $\vec{v}_k = (2; 1; k)$ , où  $k$  est un paramètre.

- a) Déterminer l'équation cartésienne du plan  $\alpha$  contenant  $d_0$  et  $d_1$ , et prouver qu'il est perpendiculaire au plan  $\pi : z = 0$ .
- b) Montrer que toutes les droites  $d_k$  sont contenues dans  $\alpha$ .
- c) Déterminer  $k$  pour que  $d_k$  soit tangente à la sphère  $\Sigma$  d'équation  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ .
- d) Calculer les coordonnées du centre et le rayon du cercle intersection de  $\Sigma$  et de  $\alpha$ .

### 3.8 Solutions des exercices

3.1.1 –

3.1.2 Oui, non, non, oui.

3.1.3 a)  $\left(\frac{9}{2}; 0\right)$ ; b)  $(0; 9)$ ; c)  $(7; -5)$ ; d)  $\left(\frac{11}{2}; -2\right)$ ; e)  $(3; 3)$ ; f)  $(-1; 11)$ .

3.1.4 a)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ ; b)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ ;

c)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ ; d)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ ;

e)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ ; f)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ ;

g)  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , avec  $k \in \mathbb{R}$ .

3.1.5 Oui, oui, non, oui.

3.1.6 a)  $\left(3; \frac{15}{2}\right)$ ; b)  $\left(-\frac{14}{3}; -4\right)$ ; c)  $(-6; -6)$ ; d)  $(-2; 0)$ ; e)  $(0; 3)$ ; f)  $\left(-\frac{34}{11}; -\frac{18}{11}\right)$ .

3.1.7 a)  $x + 4y - 23 = 0$ ; b)  $3x + 7y + 23 = 0$ ; c)  $3x + 4y + 10 = 0$ ; d)  $x + 4y - 13 = 0$ ; e)  $8x - 5y + 106 = 0$ ; f)  $y + 2 = 0$ ; g)  $x - 8 = 0$ .

3.1.8  $m_A : 5x + 9y + 3 = 0$ ,  $m_B : 7x + 9y + 3 = 0$ ,  $m_C : x = 0$  et  $G \left(0; -\frac{1}{3}\right)$ .

3.1.9 –

3.1.10  $m = -\frac{5}{7}$ .

3.1.11  $h = 7$ .

3.1.12 a)  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $m = \frac{5}{6}$ ; b)  $\vec{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $m = -1$ ; c)  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $m = \frac{4}{3}$ ;

d)  $\vec{d} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ ,  $m = 1$ ; e)  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$ ,  $m = \frac{\sqrt{5}}{4}$ ; f)  $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $m = 0$ ;

g)  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $m = \infty$ ; h)  $\vec{d} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $m = \frac{4}{5}$ .

3.1.13 –

3.1.14 a)  $7x - 6y - 1 = 0$ ; b)  $5x + 2y + 12 = 0$ ; c)  $7x + y - 12 = 0$ .

3.1.15  $AB : x - 2y - 8 = 0$ ,  $AD : x + 11y - 8 = 0$  et  $BC : x + 11y - 99 = 0$

**3.1.16** a)  $y - 2 = 0$ ; b)  $x - 6 = 0$ ; c)  $x + y - 3 = 0$ ; d)  $\frac{25}{2}$ .

**3.1.17** a)  $7x + 3y - 5 = 0$ ; b)  $9x - y - 21 = 0$ ; c)  $3x + 2y = 0$ ; d)  $y + 3 = 0$ ; e)  $x - 2 = 0$ .

**3.1.18**  $(-2; -1)$ .

**3.1.19**  $(11; -11)$ .

**3.1.20**  $h_A : 4x + 3y - 11 = 0$ ,  $h_B : x + y + 2 = 0$ ,  $h_C : 3x + 2y - 13 = 0$ ,  $H(17; -19)$ .

**3.1.21**  $7x - y + 8 = 0$ .

**3.1.22**  $m_{AB} : x - 2y + 10 = 0$ ,  $m_{BC} : 3x + y + 2 = 0$ ,  $m_{AC} : x + y - 2 = 0$ ,  $K(-2; 4)$  et  $r = 5$ .

**3.1.23**  $(2; 1)$ ,  $(4; 2)$ ,  $(-1; 7)$ ,  $(1; 8)$ .

**3.1.24**  $C(6; 1)$ .

**3.1.25**  $3x + 7y - 5 = 0$ ,  $3x + 2y - 10 = 0$  et  $9x + 11y + 5 = 0$ .

**3.1.26**  $AB : 4x + 5y + 5 = 0$ ,  $AC : y - 3 = 0$ ,  $BC : 4x + 3y - 5 = 0$ .

**3.1.27** a) concourantes en  $I(-34; -19)$ ; b) confondues,  $m = \frac{1}{5}$ ; c) concourantes en  $I(-\frac{26}{53}; \frac{36}{53})$ ; d) parallèles,  $m = 4$ .

**3.1.28** Les droites sont concourantes en  $I(\frac{8}{7}; \frac{5}{7})$ .

**3.1.29** a)  $a = \frac{1}{4}$ ; b)  $a = 1$ ; c) -.

**3.2.1**  $\sqrt{3}x + y + 5 + \sqrt{3} = 0$ .

**3.2.2** a)  $45^\circ$ ; b)  $90^\circ$ ; c)  $0^\circ$ ; d)  $55, 49^\circ$ .

**3.2.3**  $x - 5y + 3 = 0$ .

**3.2.4**  $29x - 2y + 33 = 0$ .

**3.2.5** a) 3; b) 1; c) 4; d) 0.

**3.2.6** 5.

**3.2.7**  $\sqrt{2}$ .

**3.2.8**  $6x - 8y - 55 = 0$  et  $6x - 8y + 65 = 0$ .

**3.2.9**  $AB : 4x + 3y + 20 = 0$ ,  $AD : 3x - 4y + 15 = 0$ ,  $CD : 4x + 3y - 5 = 0$  ou  $4x + 3y + 45 = 0$ .

$$3.2.10 \left(\frac{8}{5}; \frac{27}{10}\right) \text{ et } \left(\frac{28}{5}; \frac{7}{10}\right).$$

$$3.2.11 2; 3x + 4y - 8 = 0.$$

$$3.2.12 2x + 2y + 17 = 0.$$

$$3.2.13 7x + 56y - 40 = 0.$$

$$3.2.14 x + y + 5 = 0.$$

$$3.2.15 x - 3y - 5 = 0 \text{ et } 3x + y - 5 = 0.$$

$$3.2.16 \left(-\frac{69}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

### 3.3.1

a)  $C(5; -2) \quad r = 5$

b)  $C(-2; 0) \quad r = 8$

c)  $C(5; -2) \quad r = 0$

Il s'agit d'un point !

d)  $C(0; 5) \quad r = \sqrt{5}$

e)  $C(1; -2) \quad r = 5$

f)  $\emptyset$

g)  $C(-2; 1) \quad r = 0$

Il s'agit d'un point !

h)  $C\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \quad r = \frac{1}{2}$

i)  $\emptyset$

j)  $C\left(0; -\frac{1}{2}\right) \quad r = \frac{1}{2}$

k)  $C\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{2}\right) \quad r = \sqrt{0.6}$

l)  $C\left(\frac{3}{4}; -\frac{2}{3}\right) \quad r = 0$

Il s'agit d'un point !

### 3.3.2

a)  $x^2 + y^2 = 9$

b)  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 49$

c)  $(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 100$

d)  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$

e)  $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$

f)  $x^2 + y^2 = 16$

g)  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$

h)  $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$

i)  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

### 3.3.3

a) La droite coupe le cercle.

b) La droite est tangente au cercle.

c) La droite et le cercle sont disjoints.

**3.3.4** Les cercles sont tangents extérieurement.

**3.3.5**  $2x - 5y + 19 = 0$

**3.3.6** 17

**3.3.7**  $x - 2y - 4 = 0$

**3.3.8** 10

**3.3.9**  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = \frac{81}{13}$  et  $(x + 8)^2 + (y + 7)^2 = \frac{25}{13}$

**3.3.10**  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$

**3.3.11**  $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 5$  et  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$

**3.3.12**  $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 50$  et  $(x - 29)^2 + (y + 2)^2 = 800$

**3.3.13**  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$  et  $(x - \frac{22}{5})^2 + (y + \frac{31}{5})^2 = \frac{289}{5}$

**3.3.14**  $(x + \frac{10}{7})^2 + (y + \frac{25}{7})^2 = 1$  et  $(x - \frac{30}{7})^2 + (y - \frac{5}{7})^2 = 1$

**3.3.15**  $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 1$

**3.3.16**

a)  $x - 2y + 5 = 0$

b)  $3x - 4y + 43 = 0$

c)  $3x - 7y = 0$

d)  $2x - 5y + 12 = 0$

e)  $7x + 8y - 38 = 0$

f)  $5x + 3y - 13 = 0$

**3.3.17**  $45^\circ$

**3.3.18**  $90^\circ$

**3.3.19**  $2x + y - 1 = 0$  et  $2x + y + 19 = 0$

**3.3.20**  $2x + y - 5 = 0$  et  $2x + y + 5 = 0$

**3.3.21**  $2x + y - 8 = 0$  et  $x - 2y + 11 = 0$   $T_1(3; 2)$   $T_2(-3; 4)$

**3.3.22**  $x = 6$  et  $12x - 35y + 103 = 0$   $T_1(6; -2)$   $T_2(-\frac{23}{37}; \frac{101}{37})$

**3.3.23**  $90^\circ$

**3.3.24**  $\sqrt{10}$

**3.4.1**  $A \in d_1, A \notin d_2; B \notin d_1, B \in d_2.$

**3.4.2** a)  $(-3; 0; 0)$ ; b)  $(-28; 5; -15)$ ; c)  $\left(\frac{9}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$ ; d)  $(-8; 1; -3).$

**3.4.3**

$$\text{a) } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ avec } k \in \mathbb{R};$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ avec } k \in \mathbb{R};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } k \in \mathbb{R};$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

**3.4.4** -

**3.4.5** a) confondues; b) concourantes en  $(2; 3; 5)$ ; c) gauches; d) parallèles.

**3.5.1**  $A \notin \alpha, A \in \beta; B \in \alpha, B \notin \beta.$

$$\text{3.5.2 a) } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R};$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R};$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

**3.5.3** -

$$3.5.4 \text{ a) } \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}; \text{ b) } \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}; \text{ c) } \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ d) } \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}; \text{ e) } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ f) } \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$3.5.5 \text{ a) } x - 2y + 3z + 3 = 0; \text{ b) } 2x - y - 2z + 54 = 0; \text{ c) } 2x - 3y + 3z = 0; \text{ d) } 5x + 2y - z + 3 = 0.$$

$$3.5.6 \text{ a) } x - y - z = 0; \text{ b) } x + 2y + z - 13 = 0; \text{ c) } 5x + y + 12z - 39 = 0; \text{ d) } z + 2 = 0.$$

$$3.5.7 \quad x + 2z - 4 = 0$$

$$3.5.8 \quad 4x - 7y - 6z + 1 = 0.$$

$$3.5.9 \quad (x; y; z) = (2; -3; -5) + k \cdot (6; -3; 5) \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

$$3.5.10 \quad 9x + 11y + 5z - 16 = 0$$

$$3.5.11 \quad 4x + 6y + 5z - 1 = 0$$

$$3.5.12 \text{ a) parallèles; b) concourants en } (2; -3; 6); \text{ c) confondus.}$$

$$3.5.13 \text{ a) concourants en } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}; \text{ b) parallèles; c) confondus.}$$

$$3.5.14 \quad (1; -2; 2)$$

$$3.5.15 \quad \frac{x}{1} = \frac{y-5}{7} = \frac{z+3}{-5}$$

$$3.6.1 \quad 60^\circ$$

$$3.6.2 \text{ a) } 45^\circ \quad \text{b) } 87,47^\circ$$

$$3.6.3 \quad \text{Environ } 30,57^\circ$$

$$3.6.4 \text{ a) } 5 \cdot \sqrt{6}/2 \quad \text{b) } 15$$

$$3.6.5 \quad \sqrt{1162}/14$$

$$3.6.6 \text{ a) } 1 \quad \text{b) } 3$$

$$3.6.7$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ avec } l \in \mathbb{R}$$

**3.6.8** a) 8 b) 3

**3.6.9** 7

**3.6.10**  $9x + 2y - 6z - 74 = 0$  et  $9x + 2y - 6z + 58 = 0$

**3.6.11** Il s'agit des plans  $3x - 2y - z - 34 = 0$  et  $3x - 2y + 13z - 6 = 0$ .

**3.6.12**  $(1/2; 5/2; -1/2)$  et  $(-1; -1; -3)$ .

**3.6.13**  $(2; 3; 2/3)$  et  $(2; -3; 20/3)$ .

**3.7.1** a)  $C(2; 0; -1)$ ,  $r = 3$ ; b)  $\emptyset$ ; c)  $C(-2; 7; 4)$ ,  $r = 0$ ; d)  $C\left(\frac{3}{2}; -\frac{4}{3}; 2\right)$ ,  $r = \sqrt{5}$ .

**3.7.2** a)  $x^2 + (y - 2)^2 + (z + 4)^2 = 25$ ; b)  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 4)^2 = 45$ ;  
 c)  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 56$ ; d)  $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 + (z - 3)^2 = 45$ ;  
 e)  $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{175}{3}$ ; f)  $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z + 5)^2 = \frac{64}{9}$ ; g)  $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 + (z + 8)^2 = 50$ ,  
 $(x - 35/11)^2 + (y - 6/11)^2 + (z + 108/11)^2 = 50$ ; h)  $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 1)^2 = 9$ ;  
 i)  $(x + 3)^2 + (y - 6)^2 + (z + 2)^2 = 65$ ; j)  $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 + (z - 7)^2 = 49$ .

**3.7.3**  $d$  est extérieure à  $\Sigma$ .

**3.7.4** Oui, on a  $C(-1; 2; 3)$  et  $r = 8$ .

**3.7.5**  $2x + 6y - 3z - 63 = 0$

**3.7.6** a)  $10x - 11y + 2z - 34 = 0$ ; b)  $12x + 8y - 9z - 254 = 0$ ; c)  $3x - 7y + 2z + 100 = 0$ ;  
 d)  $112x - 28y - 91z - 260 = 0$ .

**3.7.7**  $7x - 2y - z - 108 = 0$ ,  $7x - 2y - z + 108 = 0$ ,  $(14; -4; -2)$ ,  $(-14; 4; 2)$ .

**3.7.8**  $12x + 4y + 3z - 209 = 0$ ,  $12x + 4y + 3z + 129 = 0$ ,  $(15; 5; 3)$ ,  $(-9; -3; -3)$ .

**3.7.9** a)  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$ , avec  $k, l \in \mathbb{R}$ ; b)  $\frac{21}{\sqrt{29}}$ .

**3.7.10** a)  $C(5; 3; 4)$ ,  $r = 7$ ; b) non; c) 12, 29; d) l'axe de rotation est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

**3.7.11** a) 43, 09; b)  $8\sqrt{3}$ ; c)  $(x - 15)^2 + (y - 15)^2 + (z + 15)^2 = 315$ .

**3.7.12**  $(x+6)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 81$ ,  $\left(x - \frac{138}{61}\right)^2 + \left(y + \frac{181}{61}\right)^2 + \left(z - \frac{53}{61}\right)^2 = \left(\frac{18}{61}\right)^2$ .

**3.7.13** a)  $x - 2y + 3 = 0$ ; b) -; c)  $k = \pm 2$ ; d)  $\left(-\frac{3}{5}; \frac{6}{5}; 0\right)$ ,  $\frac{6}{\sqrt{5}}$ .