1 Nombres complexes

1.1 Corps des nombres complexes

Soit l'ensemble

$$\mathbb{R}^2 = \{(a;b)|a,b \in \mathbb{R}\}$$

muni des deux opérations $+$ et $\cdot$ définies par

$$(a;b) + (c;d) = (a+c;b+d)$$

$$(a;b) \cdot (c;d) = (ac-bd;ad+bc)$$

Théorème

$(\mathbb{R}^2;+;\cdot)$ est un corps commutatif. C'est le corps des nombres complexes noté $\mathbb{C}$.

démonstration : $(\mathbb{R}^2;+)$ est un groupe commutatif :

$(a;b)+(c;d) = (a+c;b+d) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (a;b),(c;d) \in \mathbb{R}^2$

$(a;b)+[(c;d)+(e;f)] = [(a;b)+(c;d)]+(e;f) = (a+c+e,b+d+f)$

$(a;b)+(0;0) = (a:b) \quad \forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$ (élément neutre pour $+$: $(0;0)$)

$(a;b)+(-a;-b) = 0 \quad \forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$ (symétrique de $(a;b)$: $(-a;-b)$)

$(a;b)+(c;d) = (c;d)+(a;b) = (a+c;d+b) \quad \forall (a;b),(c;d) \in \mathbb{R}^2$

$(\mathbb{R}^2;\cdot)$ est un groupe commutatif

$(a;b)\cdot(c;d) = (ac-bd;ad+bc) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (a;b),(c;d) \in \mathbb{R}^2$

$(a;b)\cdot[(c;d)\cdot(e;f)] = (a,b)\cdot(ce-df;cf+de) = (ace-adf-bcf-bde;acf+ade+bce-bdf)$

$[(a;b)\cdot(c;d)]\cdot(e;f) = (ac-bd;ad+bc)\cdot(e;f) = (ace-bde-adf-bcf;acf-bdf+ade+bce)$

$\Rightarrow$ associativité

$(a;b)\cdot(1;0) = (1;0)\cdot(a;b) = (a;b) \quad \forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$ (élément neutre pour $\cdot$: $(1;0)$)

$(a;b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2};\frac{-b}{a^2+b^2}\right) = (1;0) \quad \forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$ (symétrique de $(a;b)$: $\left(\frac{a}{a^2+b^2};\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$)

$(a;b)\cdot(c;d) = (c;d)\cdot(a;b) = (ac-bd;ad+bc) \quad \forall (a;b),(c;d) \in \mathbb{R}^2$

$(a;b)\cdot[(c;d)+(e;f)] = (a;b)\cdot(c+e;d+f) = (ac+ae-bd-bf;ad+af+bc+be) =$

$(ac-bd;ad+bc)+(ae-bf;af+be) = (a;b)\cdot(c;d)+(a,b)\cdot(e;f)$

Remarque : bien que $\mathbb{R}$ n'est pas dans $\mathbb{R}^2$, les nombres réels sont inclus dans les nombres complexes. En effet par la bijection $\varphi(x) = (x;0)$ qui va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$ est isomorphe à $\varphi(\mathbb{R})$ et on dit alors que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Théorème

Soit $i = (0;1)$ alors

$$i^2 = (0;1)^2 = (-1;0) = -1$$

démonstration : $(0;1) \cdot (0;1) = (-1;0)$

Remarques :

a) $(a;b) = (a;0) + (0;b) = (a;0) + (b;0) \cdot \underbrace{(0;1)}_{i} = \underbrace{a + b \cdot i}_{\text{forme algébrique}}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

b) $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

a est appelé la partie réelle et b la partie imaginaire ; on écrit alors :

$z = a + bi \qquad a = \mathrm{Re}(z) \qquad b = \mathrm{Im}(z)$

1.2 Opérations dans $\mathbb{C}$

Addition (soustraction)

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Multiplication

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Division

Soit $z = a + bi$ alors

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2}$$

1.3 Conjugué et module d'un nombre complexe

Définition : soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$, alors le nombre conjugué de z, noté $\bar{z}$, est le nombre complexe

$$\bar{z} = a - bi$$

Le module de z, noté $|z|$, est le nombre réel positif

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$