Les suites

Exercice 1.

a) $u_1 = 1 \qquad u_2 = \dfrac{4}{3} \qquad u_3 = \dfrac{3}{2} \qquad u_4 = \dfrac{8}{5}$

b) $\dfrac{2n}{n+1} < \dfrac{2n+2}{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{n+1} = 2 \qquad \forall\, n \geq 1$

c) $u_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{n+1+1} = \dfrac{2n+2}{n+2} \qquad u_n = \dfrac{2n}{n+1}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+2}{n+2} - \frac{2n}{n+1} = \frac{2n^2+4n+2-2n^2-4n}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)} > 0$$

$\Rightarrow \quad u_{n+1} > u_n \qquad \forall\, n \geq 1 \quad \Rightarrow$ la suite est croissante

d) La suite est majorée par 2 et croissante donc elle converge, soit $\epsilon > 0$

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad 2 - \frac{2n}{n+1} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{2n+2-2n}{n+1} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{n+1} < \epsilon$$

$$\Rightarrow \quad n+1 > \frac{2}{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad n > \frac{2}{\epsilon} - 1$$

$n_0 = E\left(\dfrac{2}{\epsilon}\right)$, alors $\forall\, n \geq n_0$ on a $\left|\dfrac{2n}{n+1} - 2\right| < \epsilon \quad \Rightarrow \quad L = 2$

Exercice 2.

a) $P_n :\ u_n < 5$, alors P_1 est vraie $(u_1 = 1 < 5)$

supposons que P_n est vraie : $u_n < 5$

$u_{n+1} = \sqrt{4u_n + 5} < \sqrt{20+5} = \sqrt{25} = 5 \quad \Rightarrow \quad P_{n+1}$ est vraie

$\Rightarrow \quad u_n < 5$, pour tout $n \geq 1$

b) $u_{n+1}^2 - u_n^2 = 4u_n + 5 - u_n^2 = (u_n+1)\underbrace{(5-u_n)}_{>0} > 0 \quad \Rightarrow \quad u_{n+1}^2 > u_n^2$

$\Rightarrow \quad u_{n+1} > u_n \quad \forall n \geq 1 \quad (\text{car } u_n > 0) \quad \Rightarrow \quad u_n$ est croissante

c) La suite est majorée par 5 et croissante donc elle converge

$L = \sqrt{4L+5} \quad \Rightarrow \quad L^2 = 4L + 5 \quad \Rightarrow \quad L^2 - 4L - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad (L-5)(L+1) = 0$

$\Rightarrow \quad \boxed{L = 5} \quad (L = -1$ sol à élim.)

Exercice 3.

$-1 \leq \cos(n) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -2 \leq 2\cos(n) \leq 2$

$$\Rightarrow \quad \frac{-2+4}{n+2} = \frac{2}{n+2} \leq \frac{2\cos(n)+4}{n+2} \leq \frac{2+4}{n+2} = \frac{6}{n+2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n+2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{6}{n+2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cos(n)+4}{n+2} = \boxed{0}$$

Exercice 4.

a) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)^2}{(2n+3)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-2n+1}{4n^2+12n+9} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{12}{n}+\frac{9}{n^2}} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

b) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n}{\sqrt{5n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\frac{1}{n}\cdot\sqrt{5n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{5+\frac{1}{n^2}}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{5}}$$

Exercice 5.

a) $a_1 = 1 \cdot \sin(30°) = \boxed{\frac{1}{2}}$

b) $$a_2 = \sqrt{3}a_1 \cdot \sin(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}a_1 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = \sqrt{3}a_n \cdot \sin(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}a_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n a_1$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \boxed{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2}}$$

c) $(a_n)_{n\geq1}$ suite géométrique $\Rightarrow$ $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \boxed{2+\sqrt{3}}$$