x	0		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Max : $(1;1)$, c'est un carré de 1 m de côté.

2.8.13

$x =$ dimension (en cm) de la longueur du rectangle du texte imprimé

$\dfrac{392}{x} =$ dimension (en cm) de la largeur du rectangle du texte imprimé

$$f(x) = (x+4)\left(\frac{392}{x}+2\right) = 392 + 2x + \frac{1568}{x} + 8 = 2x + \frac{1568}{x} + 400 \qquad ED(f) = \mathbb{R}_+^*$$

$$f'(x) = 2 - \frac{1568}{x^2} = \frac{2(x^2-784)}{x^2} = \frac{2(x-28)(x+28)}{x^2}$$

x	0		28	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	512	$\nearrow$

Max : $(28;512)$, c'est une feuille de 32 cm sur 16 cm.

2.8.14

$x =$ dimension (en cm) du côté du carré

$$f(x) = x(32-2x)(20-2x) = 4x^3 - 104x^2 + 640x \qquad ED(f) = [0;10]$$

$$f'(x) = 12x^2 - 208x + 640 = 4(3x^2 - 52x + 160) = 4(3x-40)(x-4)$$

x	0		4		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1152	$\searrow$	0

Min : $(4;1152)$, c'est un carré de côté 4 cm.

2.8.15

$x =$ rayon (en cm) du cylindre

$\dfrac{324}{x^2} =$ hauteur (en cm) du cylindre

$f(x) = 5 \cdot \dfrac{324}{x^2} \cdot 2\pi x + 15 \cdot \pi x^2 = 15\pi x^2 + \dfrac{3240\pi}{x} \qquad ED(f) = \mathbb{R}_+^*$

$f'(x) = 30\pi x - \dfrac{3240\pi}{x^2} = \dfrac{30\pi(x^3 - 108)}{x^2}$

x		0		$3\sqrt[3]{4}$	
$f'(x)$			$+$	0	$-$
$f(x)$			$\nearrow$	$f(3\sqrt[3]{4})$	$\searrow$

Max : $(3\sqrt[3]{4}; \ldots)$, c'est un cylindre de rayon $\sim$ 4,8 cm et de hauteur $\sim$ 14,3 cm.

2.8.16

x = longueur (en m) d'un enclos rectangulaire

$\dfrac{288-8x}{9}$ = largeur (en m) d'un enclos rectangulaire

$f(x) = 6x \cdot \dfrac{288-8x}{9} = -\dfrac{16}{3}x^2 + 192x \qquad ED(f) = [0;36]$

$f'(x) = -\dfrac{32}{3}x + 192 = -\dfrac{32}{3}(x-18)$

x		0		18		36	
$f'(x)$			+	0	−		
$f(x)$		0	$\nearrow$	1728	$\searrow$	0	

Max : $(18;1728)$, chaque enclos mesure 18 m sur 16 m.

2.8.17

m = pente de la droite

droite (d) : $y = mx + h \qquad A \in d \quad \Rightarrow \quad 2 = 3m + h \quad \Rightarrow \quad h = 2 - 3m$

(d) : $y = mx + 2 - 3m \qquad$ zéro : $x = \dfrac{3m-2}{m}$

$f(m) = \dfrac{1}{2}(2-3m) \cdot \dfrac{3m-2}{m} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{-9m^2+12m-4}{m} \qquad ED(f) = \mathbb{R}^*_-$

$f'(m) = \dfrac{(-18m+12)\cdot m - (-9m^2+12m-4)}{2m^2} = \dfrac{-9m^2+4}{m^2} = \dfrac{(2-3m)(2+3m)}{2m^2}$

m		$-\frac{2}{3}$		0	
$f'(m)$	−	0	+		
$f(m)$	$\searrow$	12	$\nearrow$		

min : $\left(-\dfrac{2}{3};12\right)$, la droite a comme équation $y = -\dfrac{2}{3}x + 4$

2.8.18

fonction à optimiser : la distance au carré ($\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_+$, $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$)

$$f(x) = (x-3)^2+(\sqrt{2x-1}-0)^2 = x^2-6x+9+2x-1 = x^2-4x+8 \qquad ED(f) = \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$$

$$f'(x) = 2x-4$$

x	$\frac{1}{2}$		2	
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{13}{4}$	$\searrow$	4	$\nearrow$

min : $(2;4)$, le point est $M(2;\sqrt{3})$.

2.8.19

$M(a;1-a^2)$

$$f'(x) = -2x \quad \Rightarrow \quad (t):\ y-(1-a^2) = -2a(x-a)$$

$$\Rightarrow \quad (t):\ y = -2ax+a^2+1 \quad \Rightarrow \quad A\left(\frac{a^2+1}{2a};0\right),\ B(0;a^2+1)$$

$$g(a) = \frac{(a^2+1)^2}{4a} \qquad ED(g) =]0;1]$$

$$g'(a) = \frac{2(a^2+1)\cdot 2a\cdot 4a-(a^2+1)\cdot 4}{16a^2} = \frac{4(a^2+1)(4a^2-a^2-1)}{16a^2} = \frac{(a^2+1)(3a^2-1)}{4a^2}$$

x	0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1
$g'(a)$		$-$	0	$+$	
$g(a)$		$\searrow$	$\frac{4\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	1

min : $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$, le point est $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{2}{3}\right)$.

2.8.20

$f(\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta) \qquad ED(f) = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$f'(\theta) = 2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = 2(\cos(\theta) - \sin(\theta))(\cos(\theta) + \sin(\theta))$

$\sin(\theta) = \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \tan(\theta) = 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$

$\sin(\theta) = -\cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \tan(\theta) = -1 \quad \Rightarrow \quad \theta = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Max : $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$, le rectangle a comme dimensions $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm sur $\sqrt{2}$ cm.

2.8.21

$f(\alpha) = 6000(\pi - \alpha) + 20000\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad ED(f) = [0; \pi]$

$f'(\alpha) = -6000 + 20000 \cdot \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2000\left[5\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 3\right]$

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} \simeq \pm 0.93 + k \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \quad \alpha \simeq \pm 1.85 + k \cdot 4\pi$

x	0		1.85		π
$f'(\alpha)$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$	6000π	$\nearrow$	23722	$\searrow$	20000

min : sur le bord de $ED(f) \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$.

2.8.22

fonction à optimiser : la distance au carré ($\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_+$, $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$)

x = nombre d'heures écoulées depuis midi

$f(x) = (45 - 9x)^2 + (12x)^2 = 225x^2 - 810x + 2025 \qquad ED(f) = \mathbb{R}_+$

$f'(x) = 450x - 810$

x		0		$\frac{9}{5}$	
$f'(x)$			$-$	0	$+$
$f(x)$		2025	$\searrow$	1296	$\nearrow$

min : $\left(\frac{9}{5}; 1296\right)$, il sera 13 h 48 min.

2.8.23

x = longueur de la projection de AP sur PB

$f(x) = \dfrac{1}{4}\sqrt{x^2+81} + \dfrac{1}{5}(15 - x) \qquad ED(f) = [0; 15]$

$f'(x) = \dfrac{x}{4\sqrt{x^2+81}} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{5x - 4\sqrt{x^2+81}}{20\sqrt{x^2+81}}$

$5x = 4\sqrt{x^2+81} \quad \Rightarrow \quad 25x^2 = 16x^2 + 1296 \quad \Rightarrow \quad 9x^2 = 1296$

$\Rightarrow \quad x = 12 \ (0 \leq x \leq 15)$

x		0		12		15	
$f'(x)$			$-$	0	$+$		
$f(x)$		$\frac{21}{4}$	$\searrow$	$\frac{87}{20}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{34}}{4}$	

min : $\left(12; \frac{87}{20}\right)$, il doit accoster à 3 km du point B.

2.8.24

x = côté en dm du carré

$f(x) = 6x + 2 \cdot \dfrac{12}{x^2} = 6x + \dfrac{24}{x^2} \qquad ED(f) = \mathbb{R}_+^*$

$f'(x) = 6 - \dfrac{48}{x^3} = \dfrac{6(x^3 - 8)}{x^3}$

x	0		2	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	‖	$\searrow$	18	$\nearrow$

min : $(2; 18)$, le côté de la base : 2 dm, hauteur : 3 dm.

2.8.25

$x =$ le rayon du cylindre (en cm)

$f(x; h) = \pi x^2 \cdot h \qquad \dfrac{h}{4-x} = 3 \quad \Rightarrow \quad h = 12 - 3x$

$f(x) = \pi x^2 \cdot (12 - 3x) = 3\pi(4x^2 - x^3) \qquad ED(f) = [0; 4]$

$f'(x) = 3\pi(8x - 3x^2) = 3x\pi(8 - 3x)$

x	0		$\frac{8}{3}$		4
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{256\pi}{9}$	$\searrow$	0

Max : $\left(\frac{8}{3}; \frac{256\pi}{9}\right)$, le rayon : $\dfrac{8}{3}$ cm, hauteur : 4 cm.