

| | | | |
|---------|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 |
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | 0 | 1 | 0 |

Max : (1; 1), c'est un carré de 1 m de côté.

2.8.13

x = dimension (en cm) de la longueur du rectangle du texte imprimé

$\frac{392}{x}$ = dimension (en cm) de la largeur du rectangle du texte imprimé

$$f(x) = (x+4) \left(\frac{392}{x} + 2 \right) = 392 + 2x + \frac{1568}{x} + 8 = 2x + \frac{1568}{x} + 400 \quad ED(f) = \mathbb{R}_+^*$$

$$f'(x) = 2 - \frac{1568}{x^2} = \frac{2(x^2 - 784)}{x^2} = \frac{2(x-28)(x+28)}{x^2}$$

| | | |
|---------|-----|----|
| x | 0 | 28 |
| $f'(x)$ | - | 0 |
| $f(x)$ | 512 | |

Max : (28; 512), c'est une feuille de 32 cm sur 16 cm.

2.8.14

x = dimension (en cm) du côté du carré

$$f(x) = x(32-2x)(20-2x) = 4x^3 - 104x^2 + 640x \quad ED(f) = [0; 10]$$

$$f'(x) = 12x^2 - 208x + 640 = 4(3x^2 - 52x + 160) = 4(3x-40)(x-4)$$

| | | | |
|---------|---|------|----|
| x | 0 | 4 | 10 |
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | 0 | 1152 | 0 |

Min : (4; 1152), c'est un carré de côté 4 cm.

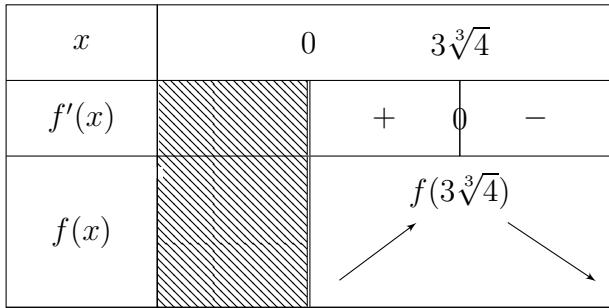
2.8.15

x = rayon (en cm) du cylindre

$\frac{324}{x^2}$ = hauteur (en cm) du cylindre

$$f(x) = 5 \cdot \frac{324}{x^2} \cdot 2\pi x + 15 \cdot \pi x^2 = 15\pi x^2 + \frac{3240\pi}{x} \quad ED(f) = \mathbb{R}_+^*$$

$$f'(x) = 30\pi x - \frac{3240\pi}{x^2} = \frac{30\pi(x^3 - 108)}{x^2}$$



Max : $(3\sqrt[3]{4}; \dots)$, c'est un cylindre de rayon $\sim 4,8$ cm et de hauteur $\sim 14,3$ cm.

2.8.16

x = longueur (en m) d'un enclos rectangulaire

$$\frac{288 - 8x}{9} = \text{largeur (en m) d'un enclos rectangulaire}$$

$$f(x) = 6x \cdot \frac{288 - 8x}{9} = -\frac{16}{3}x^2 + 192x \quad ED(f) = [0; 36]$$

$$f'(x) = -\frac{32}{3}x + 192 = -\frac{32}{3}(x - 18)$$

| | | | |
|---------|---|------|----|
| x | 0 | 18 | 36 |
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| $f(x)$ | 0 | 1728 | 0 |

Max : (18; 1728), chaque enclos mesure 18 m sur 16 m.

2.8.17

m = pente de la droite

$$\text{droite } (d) : y = mx + h \quad A \in d \Rightarrow 2 = 3m + h \Rightarrow h = 2 - 3m$$

$$(d) : y = mx + 2 - 3m \quad \text{zéro : } x = \frac{3m - 2}{m}$$

$$f(m) = \frac{1}{2}(2 - 3m) \cdot \frac{3m - 2}{m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-9m^2 + 12m - 4}{m} \quad ED(f) = \mathbb{R}_-$$

$$f'(m) = \frac{(-18m + 12) \cdot m - (-9m^2 + 12m - 4)}{2m^2} = \frac{-9m^2 + 4}{m^2} = \frac{(2 - 3m)(2 + 3m)}{2m^2}$$

| | | |
|---------|----------------|---|
| m | $-\frac{2}{3}$ | 0 |
| $f'(m)$ | - | 0 |
| $f(m)$ | 12 | |

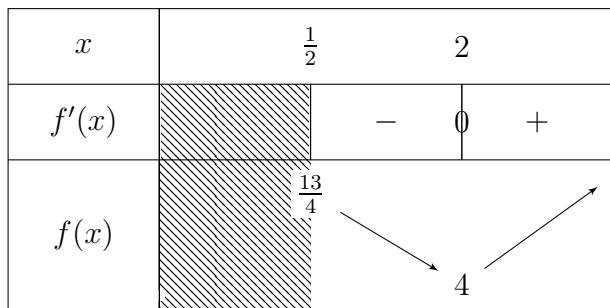
$$\min : \left(-\frac{2}{3}; 12 \right), \text{ la droite a comme équation } y = -\frac{2}{3}x + 4$$

2.8.18

fonction à optimiser : la distance au carré ($\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_+$, $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$)

$$f(x) = (x-3)^2 + (\sqrt{2x-1} - 0)^2 = x^2 - 6x + 9 + 2x - 1 = x^2 - 4x + 8 \quad ED(f) = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[$$

$$f'(x) = 2x - 4$$



min : $(2; 4)$, le point est $M(2; \sqrt{3})$.

2.8.19

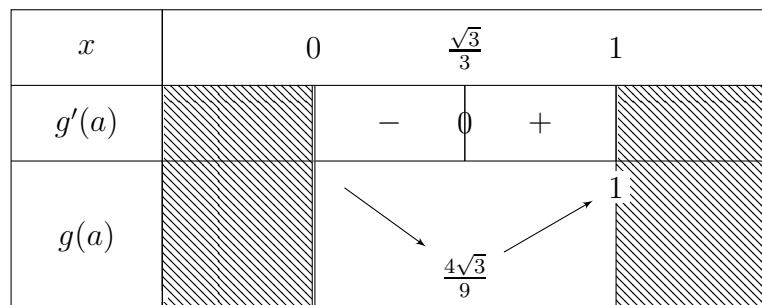
$$M(a; 1 - a^2)$$

$$f'(x) = -2x \Rightarrow (t) : y - (1 - a^2) = -2a(x - a)$$

$$\Rightarrow (t) : y = -2ax + a^2 + 1 \Rightarrow A\left(\frac{a^2 + 1}{2a}; 0\right), B(0; a^2 + 1)$$

$$g(a) = \frac{(a^2 + 1)^2}{4a} \quad ED(g) =]0; 1]$$

$$g'(a) = \frac{2(a^2 + 1) \cdot 2a \cdot 4a - (a^2 + 1) \cdot 4}{16a^2} = \frac{4(a^2 + 1)(4a^2 - a^2 - 1)}{16a^2} = \frac{(a^2 + 1)(3a^2 - 1)}{4a^2}$$



$$\min : \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{4\sqrt{3}}{9} \right), \text{ le point est } M \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{2}{3} \right).$$

2.8.20

$$f(\theta) = 2 \cos(\theta) \sin(\theta) \quad ED(f) = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f'(\theta) = 2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = 2(\cos(\theta) - \sin(\theta))(\cos(\theta) + \sin(\theta))$$

$$\sin(\theta) = \cos(\theta) \Rightarrow \tan(\theta) = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$$

$$\sin(\theta) = -\cos(\theta) \Rightarrow \tan(\theta) = -1 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$$

| x | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|--------------|---|-----------------|-----------------|
| $f'(\theta)$ | + | 0 | - |
| $f(\theta)$ | 0 | 1 | 0 |

Max : $\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$, le rectangle a comme dimensions $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm sur $\sqrt{2}$ cm.

2.8.21

$$f(\alpha) = 6000(\pi - \alpha) + 20000 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad ED(f) = [0; \pi]$$

$$f'(\alpha) = -6000 + 20000 \cdot \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2000 \left[5 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 3\right]$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} \simeq \pm 0.93 + k \cdot 2\pi \Rightarrow \alpha \simeq \pm 1.85 + k \cdot 4\pi$$

| x | 0 | 1.85 | π |
|--------------|-----------|-------|---------|
| $f'(\alpha)$ | + | 0 | - |
| $f(\alpha)$ | 6000π | 23722 | 20000 |

min : sur le bord de $ED(f)$ $\Rightarrow \alpha = 0$.

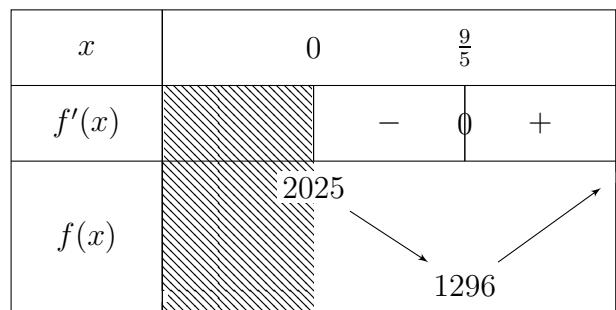
2.8.22

fonction à optimiser : la distance au carré ($\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_+$, $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$)

x = nombre d'heures écoulées depuis midi

$$f(x) = (45 - 9x)^2 + (12x)^2 = 225x^2 - 810x + 2025 \quad ED(f) = \mathbb{R}_+$$

$$f'(x) = 450x - 810$$



$\min : \left(\frac{9}{5}; 1296\right)$, il sera 13 h 48 min.

2.8.23

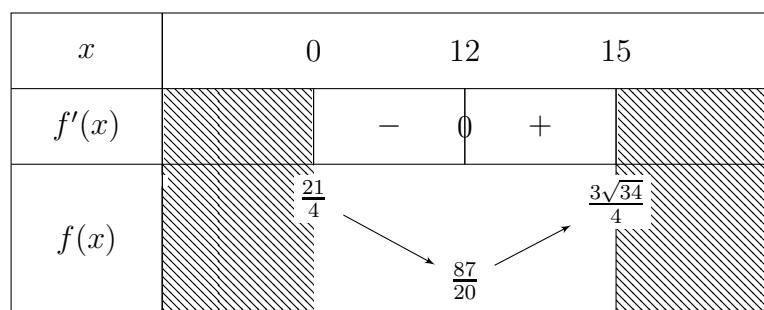
x = longueur de la projection de AP sur PB

$$f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x^2 + 81} + \frac{1}{5}(15 - x) \quad ED(f) = [0; 15]$$

$$f'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2 + 81}} - \frac{1}{5} = \frac{5x - 4\sqrt{x^2 + 81}}{20\sqrt{x^2 + 81}}$$

$$5x = 4\sqrt{x^2 + 81} \Rightarrow 25x^2 = 16x^2 + 1296 \Rightarrow 9x^2 = 1296$$

$$\Rightarrow x = 12 \quad (0 \leq x \leq 15)$$



$\min : \left(12; \frac{87}{20}\right)$, il doit accoster à 3 km du point B .

2.8.24

x = côté en dm du Carré

$$f(x) = 6x + 2 \cdot \frac{12}{x^2} = 6x + \frac{24}{x^2} \quad ED(f) = \mathbb{R}_+^*$$

$$f'(x) = 6 - \frac{48}{x^3} = \frac{6(x^3 - 8)}{x^3}$$

| | | | | |
|---------|---|---|----|---|
| x | 0 | 2 | | |
| $f'(x)$ | + | - | 0 | + |
| $f(x)$ | | | 18 | |

min : (2; 18), le côté de la base : 2 dm, hauteur : 3 dm.

2.8.25

x = le rayon du cylindre (en cm)

$$f(x; h) = \pi x^2 \cdot h \quad \frac{h}{4-x} = 3 \quad \Rightarrow \quad h = 12 - 3x$$

$$f(x) = \pi x^2 \cdot (12 - 3x) = 3\pi(4x^2 - x^3) \quad ED(f) = [0; 4]$$

$$f'(x) = 3\pi(8x - 3x^2) = 3x\pi(8 - 3x)$$

| | | | | |
|---------|---|--------------------|---|--|
| x | 0 | $\frac{8}{3}$ | 4 | |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | 0 | $\frac{256\pi}{9}$ | 0 | |

Max : $(\frac{8}{3}; \frac{256\pi}{9})$, le rayon : $\frac{8}{3}$ cm, hauteur : 4 cm.