

Chapitre 1

Puissances

Puissances à exposants entiers

1.1 Simplifier les expressions suivantes :

a) $2^4 \cdot 3^4$

b) $2^3 \cdot (-3)^3 \cdot 4^3$

c) $3^6 \cdot 5^6$

d) $5^0 \cdot 5^1 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot 5^{10}$

e) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 15^3$

f) $\frac{5^8}{5^6}$

g) $\frac{5^6}{5^8}$

h) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$

i) $\frac{7 \cdot 7^5 \cdot 7^0 \cdot 7}{7^3 \cdot 7^4}$

1.2 Simplifier les expressions suivantes :

a) $(2^2)^3$

b) $2^{(2^3)}$

c) $((-4)^2)^4$

d) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)^6$

e) $\left(-\frac{2^4}{3^3}\right)^2$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \div \left(\frac{5}{3}\right)^3$

g) $4^2 \cdot 2^5 \cdot 8^2$

h) $\left(\frac{3}{4}\right)^4 \div \left(\frac{9}{8}\right)^4$

i) $\frac{(3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot 81)^5}{3^{50}}$

1.3 Calculer sans utiliser la machine :

a) 4^{-2} b) 2^{-1} c) 3^{-3} d) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$ e) $\left(\frac{-1}{2}\right)^{-2}$ f) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

1.4 Le produit de tous les nombres de chaque ligne et de chaque colonne du tableau vaut 2^{14} . Remplir les cases manquantes :

2^{11}	2^{-2}		2^8
2^0			2^3
		2^2	2^7
2^{-1}		2^{10}	

1.5 Simplifier les expressions suivantes et les écrire sans fraction :

- a) $2^4 \cdot 2^{-2} \cdot 2$ b) $(2^3)^{-5}$ c) $\frac{5^3}{5^{-2}}$
- d) $((-1)^{-2})^{-3}$ e) $(2^{-1} \cdot 5^{-1})^{-1}$ f) $\left(\frac{11^{-2}}{11^8}\right)^{-5}$
- g) $7^{-3} \cdot \frac{49}{7^8} \cdot 7$ h) $10'000 \cdot \frac{100}{100'000} \cdot 10^{-3}$ i) $\frac{1'280 \cdot 5^7 \cdot 125}{(0,2 \cdot 25)^3}$

1.6 Simplifier les expressions suivantes et les écrire sans exposant négatif :

- a) $a^2 \cdot (a^2)^3$ b) $(2x^2)^4 \cdot (3x^5)^2$ c) $\left(\frac{2}{3}x^3\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}x^2\right)^3$
- d) $(x^2)^{-3} \cdot (x^{-4})^{-2} \cdot x^{-1}$ e) $(5x^2y^{-3}) \cdot (4x^{-5}y^{-1})$ f) $\frac{3x^2y^4}{2x^0y^3}$
- g) $\frac{3x^3 \cdot 2y}{(2x^2y)^3}$ h) $\left(\frac{4a^2b}{a^3b^2}\right) \cdot \left(\frac{5a^2b}{2b^4}\right)$ i) $(-2xy^2)^5 \cdot \left(\frac{x^7}{8y^3}\right)$

1.7 Simplifier les expressions suivantes :

- a) $x^2yz^3 \cdot 3xy \cdot 27x^3z^5$ b) $(2a^2b^3c)^4$ c) $\left(\frac{2r^3}{s}\right)^2 \cdot \left(\frac{s}{r}\right)^3$
- d) $\frac{(4x^2y^3)^5}{(2xy)^3} \div \frac{x^7}{(y^3)^4}$ e) $(u^{-2}v^3)^{-3}$ f) $\frac{8x^3y^{-5}}{4x^{-1}y^2}$
- g) $\left(\frac{x}{3}\right)^{-2} \div \left(\frac{x}{9}\right)^{-3}$ h) $\left(\frac{9y^3(3y^2)^{-2}}{(y^{-4})^{-3}}\right)^5$ i) $\left(\frac{4a^{-3}b^2}{3a^4b^{-2}}\right)^2 \cdot \left(\frac{4a^3b^{-2}}{2b^{-4}}\right)^{-2}$

Puissances à exposants rationnels

1.8 Calculer :

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} \sqrt{25} & \text{b)} \sqrt[3]{1'000} & \text{c)} \sqrt[4]{625} & \text{d)} \sqrt[5]{-32} & \text{e)} \sqrt[6]{729} \\ \text{f)} \sqrt[3]{0,027} & \text{g)} \sqrt[3]{0,125} & \text{h)} \sqrt[3]{0,015625} & \text{i)} \sqrt{0} & \text{j)} \sqrt[3]{0,000008} \end{array}$$

1.9 Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} \sqrt{24} & \text{b)} \sqrt{18} & \text{c)} \sqrt{243} & \text{d)} \sqrt{50} & \text{e)} \sqrt{300} & \text{f)} \sqrt{54} \\ \text{g)} \sqrt{125} & \text{h)} \sqrt{147} & \text{i)} \sqrt{80} & \text{j)} \sqrt{1'000} & \text{k)} \sqrt{250} & \text{l)} \sqrt{7'000} \\ \text{m)} 3\sqrt{5} - 4\sqrt{20} + 5\sqrt{45} - 3\sqrt{80} & \text{n)} 2\sqrt{40} - 2\sqrt{90} + \sqrt{4'000} - 5\sqrt{10} \end{array}$$

1.10 Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} \sqrt[3]{\sqrt{7}} & \text{b)} \sqrt[3]{2^{18} \cdot 5^{12} \cdot 3^3} & \text{c)} \sqrt[4]{64} \cdot \sqrt[4]{4} & \text{d)} \sqrt[5]{3^{15}} & \text{e)} (\sqrt[8]{\sqrt[4]{\sqrt{2}}})^{128} \\ \text{f)} \sqrt{3\sqrt{3}} & \text{g)} \sqrt[3]{5\sqrt{5\sqrt{5}}} & \text{h)} \sqrt{2\sqrt[3]{2}} & \text{i)} \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3^4\sqrt[3]{3^6}}} & \text{j)} \sqrt[3]{2\sqrt[6]{\frac{2^{14}}{\sqrt[3]{2^6}}}} \end{array}$$

1.11 Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \sqrt[5]{a^3} \cdot (\sqrt[5]{a})^2 & \text{b)} \sqrt[3]{a} \cdot (\sqrt[3]{a})^2 & \text{c)} \sqrt[5]{a^3} \cdot (\sqrt[5]{a^2})^6 & \text{d)} \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a^4} \\ \text{e)} \sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^3} \cdot (\sqrt[10]{a})^4 & \text{f)} \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a} & \text{g)} \sqrt{\sqrt[3]{a}} & \text{h)} (\sqrt[10]{\sqrt[5]{a}})^{15} \\ \text{i)} \frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}} & \text{j)} \frac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[4]{a^3}} & \text{k)} \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a^3}} & \text{l)} \frac{a^3}{\sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[6]{a}} \end{array}$$

1.12 Rendre rationnel les dénominateurs et simplifier les expressions :

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} \sqrt{\frac{1}{2}} & \text{b)} \frac{1}{\sqrt{3}} & \text{c)} \frac{2}{\sqrt{8}} & \text{d)} \frac{12}{\sqrt{24}} & \text{e)} \frac{2}{\sqrt[4]{5}} & \text{f)} \frac{2}{\sqrt[3]{2}} \end{array}$$

1.13 Simplifier les expressions suivantes et rendre rationnel le dénominateur si nécessaire :

a) $\sqrt{9x^4y^6}$ b) $\sqrt{16x^8y}$ c) $\sqrt[3]{8x^6y^2}$ d) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$

e) $\sqrt{\frac{16x^6}{3}}$ f) $\sqrt{\frac{3x}{2y^3}}$ g) $\sqrt{\frac{50x^3}{3}} \cdot \sqrt{\frac{12}{x^4}}$ h) $\sqrt{\frac{1}{3x^3y}}$

1.14 Écrire à l'aide d'exposants rationnels :

a) $\sqrt[3]{5^2}$ b) $\sqrt[10]{7}$ c) $-\sqrt[8]{7^2}$ d) $\sqrt{2}$ e) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ f) $\frac{8}{\sqrt[7]{4^3}}$
 g) $\sqrt[7]{3^7}$ h) $\sqrt[5]{x^3}$ i) $\sqrt[3]{x^5}$ j) $\sqrt{x^2+y^2}$ k) $\sqrt{2x}$ l) $\sqrt[3]{x^3-y^3}$

1.15 Écrire à l'aide de racines et d'exposants entiers positifs :

a) $7^{\frac{3}{2}}$ b) $3^{\frac{2}{5}}$ c) $-11^{0,25}$ d) $8^{-\frac{7}{5}}$ e) $27^{-\frac{1}{3}}$ f) $(-3)^{0,5}$
 g) $x^{\frac{3}{4}}$ h) $x^{\frac{1}{2}}$ i) $3x^{\frac{2}{3}}$ j) $(3x)^{\frac{2}{3}}$ k) $(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ l) $4+x^{\frac{2}{3}}$

1.16 Calculer sans l'aide de la machine :

a) $\sqrt[4]{16^3}$ b) $1^{\frac{3}{5}}$ c) $0^{\frac{5}{7}}$ d) $9^{-\frac{1}{2}}$ e) $4 \cdot 25^{\frac{3}{2}}$
 f) $(4 \cdot 25)^{\frac{3}{2}}$ g) $(-32)^{\frac{1}{5}}$ h) $(32)^{-\frac{1}{5}}$ i) $8^{\frac{2}{3}}$ j) $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{3}{2}}$
 k) $\left(\frac{16}{625}\right)^{-\frac{1}{4}}$ l) $(5+16^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ m) $19-27^{\frac{1}{3}}$ n) $(19-27)^{\frac{1}{3}}$

1.17 Calculer :

a) $8^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} + 81^{\frac{1}{4}} - 125^{\frac{1}{3}} - 1'000^{\frac{2}{3}}$ b) $(3 \cdot 32^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 108^{\frac{1}{3}} - 256 \cdot 2^{\frac{2}{3}}) \cdot 2^{\frac{1}{3}}$
 c) $(3 \cdot 2^{0,25} + 2 \cdot 32^{0,25} - 8^{0,75}) \cdot 8^{0,25}$ d) $\frac{16^{\frac{1}{3}} - 4 \cdot 128^{\frac{1}{3}} + 3 \cdot 250^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$

1.18 Remplacer les ... par = ou $\neq$. Justifier votre réponse.

- a) $(x^p)^2 \dots x^{(p^2)}$ b) $a^p \cdot b^p \dots (ab)^p$ c) $\sqrt[n]{\frac{1}{x}} \dots \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$ d) $(a+b)^{-1} \dots -a-b$
- e) $(a^2+1)^{\frac{1}{2}} \dots a+1$ f) $x^{\frac{1}{k}} \dots \frac{1}{x^k}$ g) $\sqrt[x]{3} \dots x^{\frac{1}{3}}$ h) $3x^2 \cdot (2x)^2 \dots (6x)^4$
- i) $(a+b)^2 \dots a^2+b^2$ j) $(25x^2) \cdot (20x)^2 \dots (10x)^4$

1.19 Résoudre les équations suivantes :

- a) $x^6 = 50$ b) $9x^5 = 72$ c) $8x^4 - 100 = 0$
- d) $\frac{1}{x^3} = 20$ e) $x^8 - 7x^6 = 0$ f) $x^4 + 16 = 0$

1.20 Le volume d'une boule est de $696,9 \text{ dm}^3$. Quel est son rayon ?

1.21 *Visibilité.*

Par un jour clair, la distance d (en km) de visibilité depuis le sommet d'un grand bâtiment de hauteur h (en m) peut être donnée approximativement par $d = 3,5\sqrt{h}$.

- a) Donner la distance de visibilité approximative à partir du sommet de la Sears Tower de Chicago, haute de 436 m.
- b) Quelle est la hauteur d'une tour au sommet de laquelle on a une visibilité de 50 km ?

1.22 *Longueur d'un flétan.*

Le rapport entre la longueur L (en mètres) et la masse W (en kilogrammes) d'un flétan du Pacifique peut être donné approximativement par la formule $L = 0,46\sqrt[3]{W}$.

- a) Le plus grand spécimen connu pèse 230 kilos. Calculer sa longueur.
- b) Quelle est la masse d'un flétan de 1,5 mètres de longueur.

1.23 *Masse d'une baleine.*

Le rapport entre la longueur L (en mètres) et la masse W (en tonnes) d'une baleine (rorqual boréal) peut être évalué par $W = 0,03 \cdot L^{2,43}$.

- a) Calculer la masse d'une baleine de 7,5 m de long.
- b) Calculer la longueur d'une baleine de 3 tonnes.

Solutions des exercices

Puissances à exposants entiers

1.1 a) 6^4 ; b) -24^3 ; c) 15^6 ; d) 5^{55} ; e) 15^5 ; f) 5^2 ; g) $\frac{1}{5^2}$; h) $-\frac{2^5}{3^5}$; i) 1.

1.2 a) 2^6 ; b) 2^8 ; c) 2^{16} ; d) $\frac{1}{3^{18}}$; e) $\frac{2^8}{3^6}$; f) $\frac{2^3}{5^3}$; g) 2^{15} ; h) $\frac{2^4}{3^4}$; i) 1.

1.3 a) $\frac{1}{16}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{27}$; d) 4; e) 4; f) $\frac{27}{8}$.

1.4

2^{11}	2^{-2}	2^{-3}	2^8
2^0	2^6	2^5	2^3
2^4	2	2^2	2^7
2^{-1}	2^9	2^{10}	2^{-4}

1.5 a) 2^3 ; b) 2^{-15} ; c) 5^5 ; d) 1; e) 10; f) 11^{50} ; g) 7^{-8} ; h) 10^{-2} ; i) 10^8 .

1.6 a) a^8 ; b) $144x^{18}$; c) $\frac{3}{2}x^{12}$; d) x ; e) $\frac{20}{x^3y^4}$; f) $\frac{3}{2}x^2y$; g) $\frac{3}{4x^3y^2}$; h) $\frac{10a}{b^4}$; i) $-4x^{12}y^7$.

1.7 a) $3^4x^6y^2z^8$; b) $2^4a^8b^{12}c^4$; c) 2^2r^3s ; d) 2^7y^{24} ; e) $u^6v^{-9} = \frac{u^6}{v^9}$; f) $2x^4y^{-7} = \frac{2x^4}{y^7}$; g) $3^{-4}x = \frac{x}{3^4}$; h) $y^{-65} = \frac{1}{y^{65}}$; i) $\frac{4}{9}a^{-20}b^4 = \frac{4b^4}{9a^{20}}$.

Puissances à exposants rationnels

1.8 a) 5; b) 10; c) 5; d) -2; e) 3; f) 0,3; g) 0,5; h) 0,25; i) 0; j) 0,02.

1.9 a) $2\sqrt{6}$; b) $3\sqrt{2}$; c) $9\sqrt{3}$; d) $5\sqrt{2}$; e) $10\sqrt{3}$; f) $3\sqrt{6}$; g) $5\sqrt{5}$; h) $7\sqrt{3}$; i) $4\sqrt{5}$; j) $10\sqrt{10}$; k) $5\sqrt{10}$; l) $10\sqrt{70}$; m) $-2\sqrt{5}$; n) $13\sqrt{10}$.

1.10 a) $\sqrt[6]{7}$; b) 120'000; c) 4; d) 27; e) 4; f) $\sqrt[4]{27}$; g) $\sqrt[12]{78'125}$; h) $\sqrt[3]{4}$; i) 3; j) 2.

1.11 a) a ; b) a ; c) a^3 ; d) $\sqrt[12]{a^{25}}$; e) $\sqrt{a^3}$; f) $\sqrt[4]{a^5}$; g) $\sqrt[6]{a}$; h) $\sqrt[10]{a^3}$; i) $\sqrt[6]{a^5}$; j) $\sqrt[12]{a}$; k) $\sqrt[12]{a}$; l) $\sqrt[6]{a^7}$.

1.12 a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\sqrt{6}$; e) $\frac{2\sqrt[4]{125}}{5}$; f) $\sqrt[3]{4}$.

1.13 a) $3x^2y^3$; b) $4x^4\sqrt{y}$; c) $2x^2\sqrt[3]{y^2}$; d) $3x^2y$; e) $\frac{4\sqrt{3}}{3}x^3$; f) $\frac{\sqrt{6xy}}{2y^2}$; g) $\frac{10\sqrt{2x}}{x}$;

h) $\frac{\sqrt{3xy}}{3x^2y}$.

1.14 a) $5^{\frac{2}{3}}$; b) $7^{\frac{1}{10}}$; c) $-7^{\frac{1}{4}}$; d) $2^{\frac{1}{2}}$; e) $3^{-\frac{1}{2}}$; f) $2^{\frac{15}{7}}$; g) 3; h) $x^{\frac{3}{5}}$; i) $x^{\frac{5}{3}}$; j) $(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$; k) $(2x)^{\frac{1}{2}}$; l) $(x^3 - y^3)^{\frac{1}{3}}$.

1.15 a) $\sqrt{7^3}$; b) $\sqrt[5]{3^2}$; c) $-\sqrt[4]{11}$; d) $\frac{1}{\sqrt[5]{8^7}}$; e) $\frac{1}{\sqrt[3]{2^7}}$; f) -; g) $\sqrt[4]{x^3}$; h) $\sqrt{x}$; i) $3\sqrt[3]{x^2}$; j) $\sqrt[3]{9x^2}$; k) $\sqrt{x^2 - y^2}$; l) $4 + \sqrt[3]{x^2}$.

1.16 a) 8; b) 1; c) 0; d) $\frac{1}{3}$; e) 500; f) 1000; g) -2; h) $\frac{1}{2}$; i) 4; j) $\frac{1}{125}$; k) $\frac{5}{2}$; l) 3; m) 16; n) -2.

1.17 a) -85; b) -482; c) 6; d) 1.

1.18 a) $(x^p)^2 \neq x^{(p^2)}$ car $(x^p)^2 = x^{2p}$ et $x^{(p^2)} = x^{p^2}$; b) $a^p \cdot b^p = (ab)^p$; c) $\sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$; d) $(a + b)^{-1} \neq -a - b$ car $(a + b)^{-1} = \frac{1}{a + b} \neq -a - b$; e) $(a^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \neq a + 1$ car $(a^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^2 + 1} \neq a + 1$; f) $x^{\frac{1}{k}} \neq \frac{1}{x^k}$ car $x^{\frac{1}{k}} = \sqrt[k]{x}$ et $\frac{1}{x^k} = x^{-k}$; g) $\sqrt[3]{3} \neq x^{\frac{1}{3}}$ car $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$ et $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$; h) $3x^2 \cdot (2x)^2 \neq (6x)^4$ car $3x^2 \cdot (2x)^2 = 12x^4$ et $(6x)^4 = 1296x^4$; i) $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$ car $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; j) $(25x^2) \cdot (20x)^2 = (10x)^4$.

1.19 a) $S = \{-\sqrt[6]{50}; \sqrt[6]{50}\} = \{\sim -1,92; \sim 1,92\}$;

b) $S = \{\sqrt[5]{8}\} = \{\sim 1,52\}$;

c) $S = \{-\sqrt[4]{\frac{25}{2}}; \sqrt[4]{\frac{25}{2}}\} = \{-\sqrt[4]{12,5}; \sqrt[4]{12,5}\} = \{\sim -1,88; \sim 1,88\}$;

d) $S = \{\frac{1}{\sqrt[3]{20}}\} = \{\sim 0,37\}$;

e) $S = \{-\sqrt{7}; 0; \sqrt{7}\} = \{\sim -2,65; 0; \sim 2,65\}$;

f) $S = \emptyset$.

1.20 Le rayon de la boule est égal à 5,5 dm.

1.21 a) 73 km; b) 204 m.

1.22 a) 2,82 m; b) 34,7 kg.

1.23 a) 4 tonnes; b) 6,65 m.

