

Chapitre 2

Exponentielles et logarithmes

Equations

2.1 Résoudre les équations ci-dessous :

a) $5^x = 25$

d) $4^x = 64$

h) $8^{7x-2} = 8^{-3x+8}$

b) $3^x = \frac{1}{9}$

e) $4^x = 8$

f) $9^{2x+1} = 1$

c) $x^4 = 16$

g) $16 \cdot 2^x = 4^{3x+5}$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+7} = 2$

2.2 Déterminer la valeur approchée de x en utilisant la calculatrice.

a) $x = \log(50)$;

$x = \log(-2)$;

$x = \log(e^3)$

b) $x = \ln(10)$;

$x = \ln(0)$;

$x = \ln(\pi)$

c) $\log(x) = 4.32$;

$\log(x) = -4.5$;

$\log(x) = 1.05$

d) $\ln(x) = 1$;

$\ln(x) = -4.5$;

$\ln(x) = 3$

2.3 Résoudre les équations ci-dessous :

a) $145^x = 3451$

b) $5^{2x} = 456.35$

c) $1000 \cdot 1.12^x = 10'000$

d) $20 \cdot 5^{3x} = 800$

e) $\frac{e^{x+1}}{100} = 20$

f) $20 + 100 \cdot e^{-0.5x} = 60$

Intérêts

2.4 *Intérêts simples*

Lorsque la durée d'un placement est courte, moins d'une année, on calcule les intérêts simples I . La formule est $I = \frac{C \cdot t \cdot n}{100 \cdot 360}$, où C est le capital, t le taux en % et n la durée du placement en nombre de jours.

- a) On donne $C = 1'800$ francs, $t = 5\%$ et $n = 240$ jours. Calculer I .
- b) On donne $C = 257'500$ francs, $t = 1.25\%$ et $I = 1'432.30$ francs. Calculer n .
- c) On donne $C = 282.50$ francs, $n = 240$ jours et $I = 0.55$ francs. Calculer t .
- d) On donne $t = 0.5\%$, $n = 200$ jours et $I = 19$ francs. Calculer C .

2.5 *Intérêts composés*

- a) Calculer la valeur acquise d'un capital de $10'000$ francs placé pendant 11 ans à 0.75% .
- b) Calculer le capital dont la valeur dans 8 ans sera de $1'665.85$ francs au taux de 8% .
- c) A quel taux annuel doit-on placer $2'350$ francs pour retirer $20'000$ francs dans 40 ans ?
- d) Combien de temps faut-il placer, à 1.75% , $4'720$ francs pour retirer en tout $5'812.40$ francs ?

2.6 *Intérêts composés*

Quelle somme retire-t-on au bout de 20 ans si l'on place $20'000$ francs à 1.25% pendant 5 ans, puis à 1.5% pendant 12 ans, et à 1.75% pendant le reste du temps ?

2.7 *Intérêts composés*

- a) Calculer la valeur acquise par $40'000$ francs à 3.75% pendant 10 ans à intérêts composés.
- b) Calculer la valeur actuelle d'un capital qui vaudra $10'730.40$ francs dans 7 ans à 5.25% .
- c) Il y a six ans, on a placé $12'000$ francs à un certain taux. On retire aujourd'hui $14'751.05$ francs. Quel était ce taux ?
- d) On dispose de $100'000$ francs. On place cette somme à 9% . Après combien d'années aura-t-on $364'248.25$ francs ?

2.8 *Intérêts composés*

Partager $10'000$ francs entre deux frères âgés de 14 et 16 ans de telle manière que les parts placées à 3% leur donnent un même montant quand ils atteindront leur majorité.

2.9 *Intérêts composés*

Une banque propose de tripler le capital placé sur une période de 12 ans. Le taux dépend-il du capital placé ? Si non, quel est ce taux ?

2.10 *Intérêts composés*

Pierre désire s'acheter une voiture de sport. Il décide de verser chaque premier janvier de

chaque année 3'500 francs, ceci pendant 10 ans. Le taux de placement du capital constitué, année après année, est de 3%. Quel montant touche-t-il à la fin des dix ans ?

2.11 *Intérêts composés*

- En capitalisation semestrielle, quelle est la valeur acquise d'un capital de 10'000 francs au bout de 7 ans au taux de 6% ?
- Même question pour 15'000 francs au bout de 5.5 ans au taux de 7%.

2.12 *Intérêts composés*

On place 2'900 francs à 4% pendant un certain temps. Pour un an de plus, on retirerait 185.72 francs de plus. Calculer la durée du placement.

2.13 *Intérêts composés*

- Calculer l'intérêt gagné durant la 12^{ème} année grâce à un capital initial de 15'000.- placés à un taux de 3%.
- Un capital de 80'000.- placé à 4.5% a rapporté 15'401.50 francs d'intérêts. Quelle est la durée du placement ?
- Un capital de 20'000 francs a rapporté 9282 francs en 4 ans. Quel est le taux ?
- Une personne a gagné 5000.- en 10 ans à un taux de 3%. Quel était le capital initial ?

2.14 *Intérêts composés*

On place un capital C à un taux d'intérêt annuel i pendant une durée de n années et on obtient le montant C_n . Remplir le tableau ci-dessous :

C	i	n	C_n
4'720.-	3.5%	12 ans	
	3.5%	24 ans	5'388.65
9'440.-	3.5%		11'604.17
790.-		72 ans	9'404.43

2.15 *Intérêts composés*

En 1867, les USA ont acheté l'Alaska à la Russie pour la somme de \$ 7'200'000. En supposant que la valeur du terrain augmente régulièrement de 3% par an, quelle aurait été sa valeur en l'an 2'000 ?

2.16 *Intérêts composés*

CHF 10'000.- sont déposés sur un compte d'épargne à un taux d'intérêts composés de 11% par an. Combien faudra-t-il de temps pour que la somme double ?

Applications aux sciences sociales, expérimentales ou économiques

2.17 Le nombre de bactéries triple toutes les 5 heures. Au départ, il y en a 2000.

- a) Trouver la fonction exprimant le nombre de bactéries en fonction du temps.
- b) Trouver le nombre de bactéries après 1 jour.
- c) Après combien de temps le nombre de bactéries aura-t-il centuplé ?

2.18

- a) Un objet vaut actuellement 2000 francs. Sa valeur double tous les 3 ans. Quelle sera sa valeur dans 12 ans ? Dans n ans ?
- b) Il y a 5 ans, un objet valait 1000 francs. Actuellement, il vaut 3000 francs. Sachant que son prix évolue de manière exponentielle, quel sera son prix dans 12 ans ? Après combien de temps vaudra-t-il 21'000 francs (au mois près) ?

2.19 La valeur en francs d'un équipement informatique est donnée par la formule suivante : $P(t) = 6000 \cdot 0.82^t$, où t représente le nombre d'années écoulées depuis l'achat.

- a) Quelle est la valeur d'achat ?
- b) Quelle est la valeur après 5 ans ?
- c) Après combien de temps cet équipement ne vaut plus que 1000 francs ?

2.20 Le modèle de Jenss est généralement considéré comme la formule la plus précise pour prévoir la taille d'un enfant en âge préscolaire. Si y est sa taille en cm et x son âge en années, on a $y = 79.041 + 6.39x - e^{3.261 - 0.993x}$. Quelle est, d'après ce modèle, la taille d'un enfant d'une année ?

2.21 La relation d'Ehrenberg $\ln(m) = \ln(2.4) + 1.84h$ est une formule empirique liant la taille h (en mètres) à la masse moyenne m (en kilogrammes) d'enfants âgés de 5 à 13 ans.

- a) Évaluer, à l'aide de cette formule, la taille moyenne d'un enfant de 7 ans qui pèse 21.8 kg.
- b) Évaluer, à l'aide de cette formule, la masse moyenne d'un enfant de 8 ans qui mesure 1.5 m.

2.22 Un biologiste sait que la population canine d'une ville croît selon une fonction exponentielle. Une enquête faite il y a six ans montre qu'il y avait alors 3500 chiens. Aujourd'hui, on sait qu'il y a 5500 chiens. Combien y aura-t-il de chiens dans cette ville dans quatre ans ?

2.23 La masse m (en kilogrammes) d'une éléphante d'Afrique à l'âge de t (années) peut être donnée approximativement par $m = 2'600(1 - 0.51e^{-0.057t})^3$.

- a) Donner approximativement sa masse à la naissance.
- b) Évaluer l'âge d'une éléphante d'Afrique ayant une masse de 1.8 tonnes.

2.24 Selon le test effectué en usine, la fonction $f(h) = 101 - e^{0.064 \cdot h}$ représente le pourcentage de téléphones mobiles de la marque Konica 4440, encore en fonction après h heures de veille.

- a) Calculer le pourcentage de téléphones fonctionnant après 17 heures de veille.
- b) Calculer le pourcentage de téléphones fonctionnant après 2 jours de veille.
- c) Après combien d'heures le dernier Konica s'éteint-il ?

2.25

- a) Quel est le plus grand nombre entre $a = 10^{1500}$ et $b = e^{3454}$?
- b) Déterminer la plus grande puissance de 5 qui est inférieure à 6^{1000} .
- c) Déterminer le nombre de chiffres du nombre $a = 1234^{456}$.

2.26 Un objet a une température de 80°C ; on suppose que la température T de l'objet décroît exponentiellement et que sa température est de 50°C après 20 minutes.

- a) Déterminer la température de l'objet après 50 minutes.
- b) Après combien de minutes et de secondes (à la seconde près) la température de l'objet est-elle de 15°C ?

2.27 Un pêcheur esquimau tombe dans l'eau dont la température est de 0°C . La relation $T = 37e^{-0.02t}$ donne la température T de son corps après t minutes.

- a) Quelle sera la température de son corps après 45 minutes.
- b) Calculer le temps dont disposent ses amis pour le secourir si l'on sait qu'il s'évanouira lorsque son corps sera à une température de 25°C .

2.28 La population d'une culture bactérienne double toutes les 12 heures. Supposons que la population initiale est de 10'000 bactéries.

- a) Déterminer la relation qui représente la taille de la population N après t heures.
- b) Combien y aura-t-il de bactéries après une semaine ?
- c) Au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura-t-il triplé ?

2.29 Un étang contient 1'000 truites. Trois mois plus tard, il n'en reste que 600.

- a) A l'aide d'un modèle exponentiel, trouver une formule permettant d'estimer le nombre N de truites restantes après t mois.
- b) Combien y aura-t-il de truites dans l'étang après une année ?
- c) Après combien de temps y en aura-t-il plus que 80 ?

2.30 Un médicament est éliminé du corps par l'urine. Un patient en avale une dose de 10 mg. Une heure plus tard, des mesures montrent qu'il ne reste plus que 8 mg de ce médicament dans son corps.

- a) A l'aide d'un modèle exponentiel, trouver une formule permettant d'estimer la quantité Q de médicament encore présente dans le corps du patient après t heures.
- b) Donner approximativement la quantité du médicament dans le corps du patient 8 h après l'absorption.
- c) Après combien de temps, le patient n'aura plus que 1 mg de ce médicament dans son corps ?

2.31 Le taux de dépréciation annuel d'une voiture de valeur initiale CHF 18'000.- est de 25%.

- a) Trouver la valeur v de cette voiture après t années.
- b) Calculer la valeur de la voiture après 8 ans.
- c) Calculer la valeur de la voiture lorsque t devient très grand.

2.32 Les grottes de Lascaux ont été découvertes en 1940. Des analyses ont montré que le charbon trouvé dans ces grottes avait perdu le 83% de la quantité de C^{14} présent dans les plantes vivantes. Déterminer l'âge des peintures de Lascaux. (La demi-vie du carbone¹⁴ est de 5730 ans.)

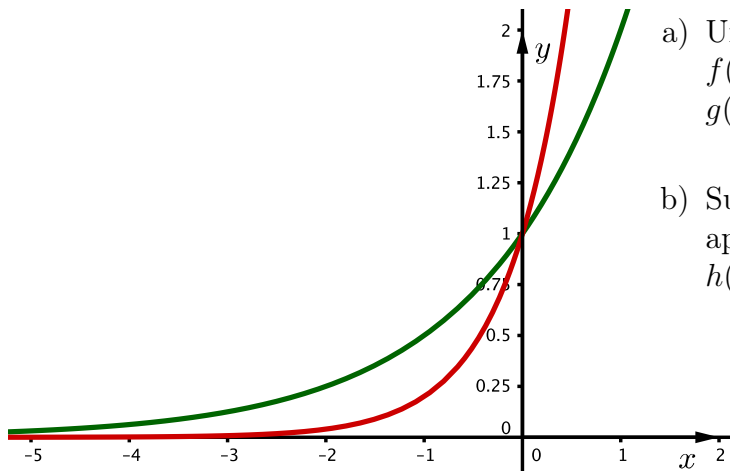
2.33 La population d'un pays A était de 80 millions au début de l'année 1985. De 1985 à 1995, la population a augmenté chaque année de 4% de la valeur qu'elle avait au début de chaque année.

- a) Déterminer la grandeur (à 0.1 million près) de la population au début de l'année 1995.
- b) Avec ce même taux de croissance, au cours de quelle année la population dépassera-t-elle 200 millions ?

2.34 La population d'un pays B a passé de 100 millions au début 1985 à 186 millions au début 1995. En le supposant constant, déterminer le taux de croissance annuel de la population (au dixième de % près).

Graphes

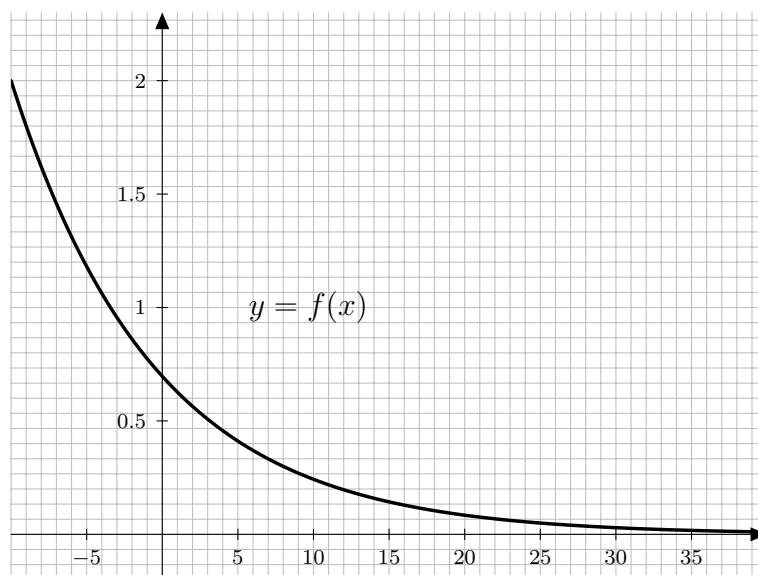
2.35



- a) Une courbe de ce graphique représente $f(x) = 2^x$, l'autre courbe représente $g(x) = 5^x$. Déterminer qui est qui.
- b) Sur ce même graphique, représenter approximativement la fonction $h(x) = 4^x$.

2.36 On a tracé ci-dessous une partie du graphe d'une fonction f représentant la quantité de glace (en décilitres) dans un verre de granita en fonction du temps x (en minutes).

On suppose que le verre a été acheté il y a 10 minutes et qu'en ce moment précis, $x = 0$.



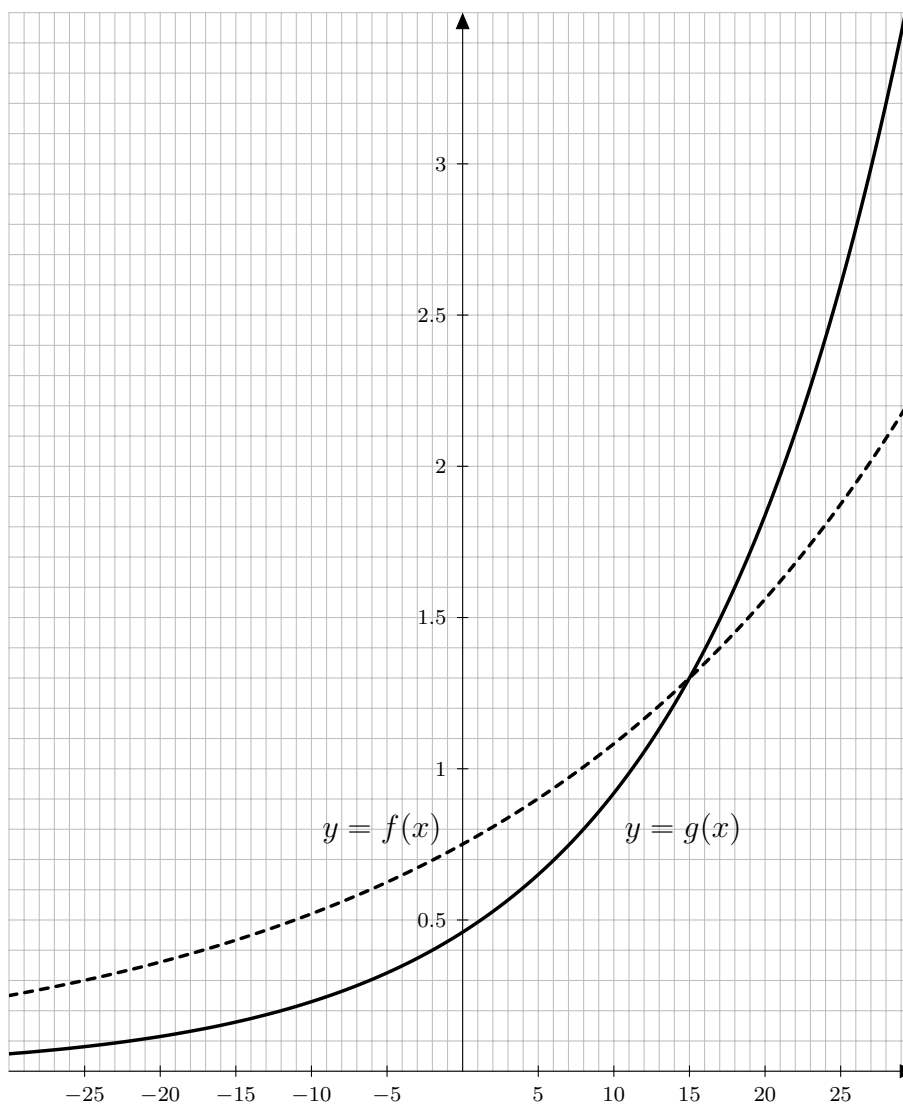
- Quelle quantité de glace y a-t-il en ce moment dans le verre ?
- Quelle quantité de glace y avait-il dans le verre au moment de son achat ?
- La fonction f est-elle croissante ou décroissante ? Interpréter cette réponse dans le contexte du verre de granita.
- De quelle valeur se rapproche $f(x)$ lorsque x devient de plus en plus grand ? Interpréter cette réponse dans le contexte du verre de granita.

2.37 On a tracé ci-dessous une partie du graphe de deux fonctions.

La fonction f , tracée en traitillés, représente la population (en millions) d'un pays A en fonction du temps x (en années).

La fonction g , en trait plein, représente la population (en millions) d'un autre pays B , également en fonction du temps x .

La valeur $x = 0$ correspond à la situation au premier janvier 2000.

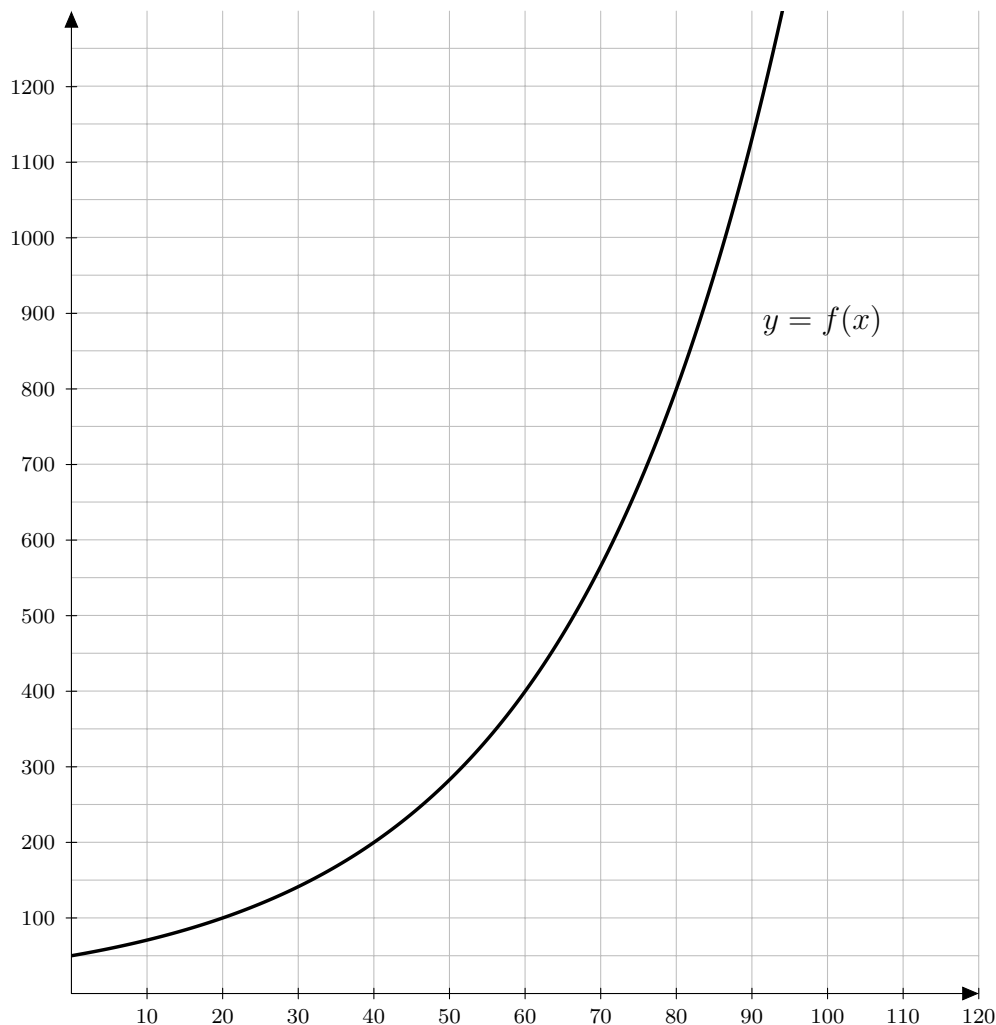


- Déterminer graphiquement l'ordonnée à l'origine de chacune de ces fonctions. Interpréter le résultat obtenu dans ce contexte.
- Quel pays avait la plus grande population en 2010 ? Quelles valeurs permettent de l'affirmer ?
- Quelle fonction croît le plus rapidement ? Qu'est-ce que cela signifie dans ce contexte ?
- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$. Interpréter le résultat.
- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$. Interpréter le résultat.

2.38 Un biologiste étudie l'évolution d'une population de bactéries placées dans une culture.

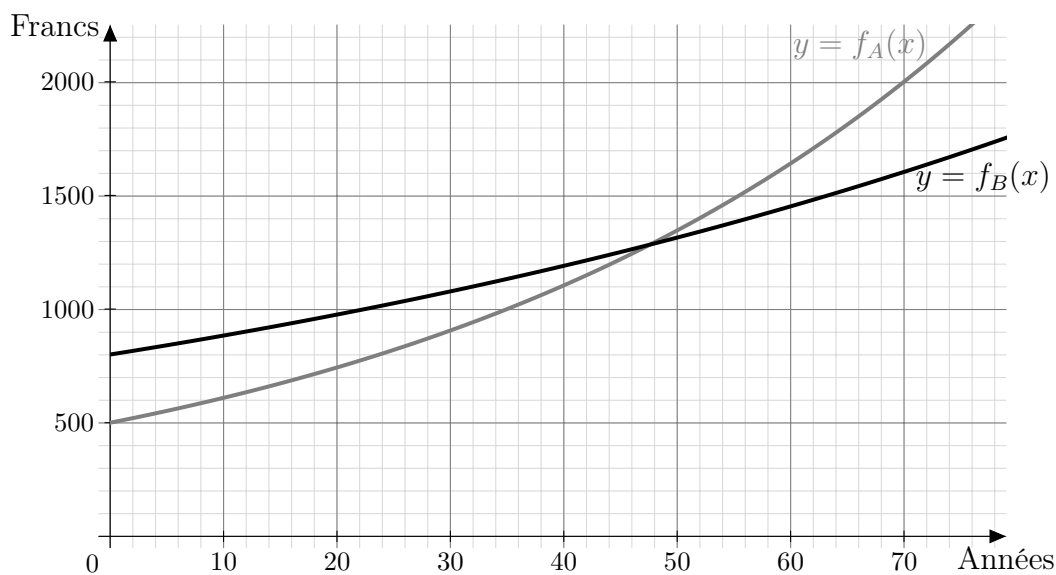
Ces bactéries vont se reproduire par division cellulaire, c'est-à-dire que chaque bactérie va se diviser pour former deux bactéries identiques, et ceci à intervalle régulier.

La fonction f , tracée ci-dessous, représente le nombre de bactéries présentes dans la culture du biologiste en fonction du temps (en minutes) écoulé depuis le début de l'expérience, à 8h du matin.



- Combien y avait-il de bactéries dans sa culture au début de l'expérience ?
- Sachant qu'il y a actuellement 700 bactéries dans la culture, déterminer approximativement l'heure qu'il est.
- Après combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé ? Quadruplé ?
- D'après ce graphique, à quel intervalle de temps intervient la division cellulaire ?

2.39 Les deux graphes ci-dessous représentent l'évolution du capital de deux comptes A et B en fonction des années depuis l'ouverture de ces comptes.



- Déterminer graphiquement l'ordonnée à l'origine de chacune de ces fonctions.
Interpréter ces réponses.
- Résoudre graphiquement l'équation $f_A(x) = f_B(x)$.
Interpréter la réponse.
- Combien d'années faut-il pour que le capital placé sur le compte A dépasse celui du compte B ?
- Combien y a-t-il d'argent sur chaque compte après 20 ans ?
A quoi correspondent ces valeurs par rapport aux fonctions f_A et f_B ?
- Combien faut-il d'années à chaque placement pour que le capital double ?

Solutions des exercices

Equations

2.1 a) $S = \{2\}$; b) $S = \{-2\}$; c) $S = \{-2; 2\}$; d) $S = \{3\}$; e) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$; f) $S = \left\{\frac{-1}{2}\right\}$;
g) $S = \left\{\frac{-6}{5}\right\}$; h) $S = \{1\}$; i) $S = \{-8\}$

2.2

a) $x \cong 1.698970004$; $x = \log(-2)$ n'existe pas; $x \cong 1.302883446$

b) $x \cong 2.302585093$; $x = \ln(0)$ n'existe pas; $x \cong 1.144729886$

c) $x \cong 20892.96$; $x \cong 0.000031$; $x \cong 11.22018454$

d) $x = e$; $x \cong 0.0111089965$; $x \cong 20.08553692$

2.3 a) $x = \frac{\ln(3451)}{\ln(145)} \cong 1.63690$; b) $x = \frac{\ln(456, 35)}{2 \cdot \ln(5)} \cong 1.90230$;

c) $x = \frac{\ln(10)}{\ln(1, 12)} \cong 20.31776$; d) $x = \frac{\ln(40)}{3 \cdot \ln(5)} \cong 0.76401$;

e) $x = \ln(2000) - 1 \cong 6.60090$; f) $x = \frac{\ln(0, 4)}{-0, 5} \cong 1.832581$

Intérêts

2.4 a) 60 francs; b) 160 jours; c) 0,3%; d) 6840 francs

2.5 a) 10'856.65 francs; b) 900 francs; c) 5.5%; d) 12 ans

2.6 26'804.10 francs

2.7 a) 57'801.75 francs; b) 7500 francs; c) 3.5%; d) 15 ans

2.8 Le cadet reçoit 4'852.25 francs et l'aîné reçoit 5'147.75 francs.

2.9 Cela ne dépend pas du capital placé. Le taux est de 9.59%

2.10 41'327.28 francs

2.11 a) 15'125.90 francs; b) 21'899.55 francs

2.12 12 ans

2.13 a) 622.90 francs ; b) $n \cong 4$; c) Le taux est de 10% ; d) $C_0 \cong 14'538.40$ francs

2.14	C	i	n	C_n
	4'720.—	3.5%	12 ans	7'132.25
	2'360.—	3.5%	24 ans	5'388.65
	9'440.—	3.5%	6 ans	11'604.17
	790.—	3.5%	72 ans	9'404.43

2.15 Le capital aurait valu environ 367'014'635\$.

2.16 7 ans.

Applications aux sciences sociales, expérimentales ou économiques

2.17 a) $N(t) = 2000 \cdot 3^{0.2t}$; b) $N(24) = 2000 \cdot 3^{4.8} \cong 390'132$ bactéries ; c) $t \cong 21$ heures

2.18 a) $P(n) = 2000 \cdot 2^{\frac{n}{3}}$; $P(12) = 32'000$; b) $P(12) = 41899.85$; 8 ans 10 mois

2.19 a) $P(0) = 6000$; b) $P(5) \cong 2224$; c) $t \cong 9$ ans

2.20 Selon ce modèle, la taille d'un enfant d'une année est d'environ 76 cm.

2.21 a) Il mesure environ 1.2 m ; b) il pèse environ 37.9 kg.

2.22 $C(t) = 3500 \cdot e^{0.075331 \cdot t} = 3500 \cdot \left(\frac{11}{7}\right)^{\frac{t}{6}}$. Selon ce modèle, il y aura 7434 chiens.

2.23 a) A la naissance, elle pèse environ 306 kg ; b) 26 ans.

2.24 a) 98.0% ; b) 79.4% ; c) 72.1 heures

2.25 a) $b > a$; b) $5^{1113} < 6^{1000} < 5^{1114}$; c) 1'410 chiffres

2.26 a) 24.7 ° C ; b) 71 min 14 s

2.27 a) Elle sera de 15.04 ° C ; b) il faut le secourir avant environ 19.6 min.

2.28 a) $N(t) = 10'000 \cdot 2^{t/12}$; b) après une semaine, il y aura $1.6384 \cdot 10^8$ bactéries ; c) le nombre de bactéries aura triplé après environ 19 h.

2.29 a) $Q(t) = 1'000 \cdot 0.6^{t/3}$; b) après une année, il y aura environ 129 truites ;
c) il n'y aura plus que 80 truites après environ 14.8 mois.

2.30 a) $N(t) = 10 \cdot 0.8^t$;

b) après 8h, il reste environ 1.68 mg de médicament dans le corps ;

c) il faut attendre 10h, 19min et 8s pour qu'il ne reste plus que 1 mg de médicament dans le corps du patient.

2.31 a) $V(t) = 18'000 \cdot 0,75^t$; b) après 8 ans, la voiture ne vaut plus que CHF 1'802.- ;

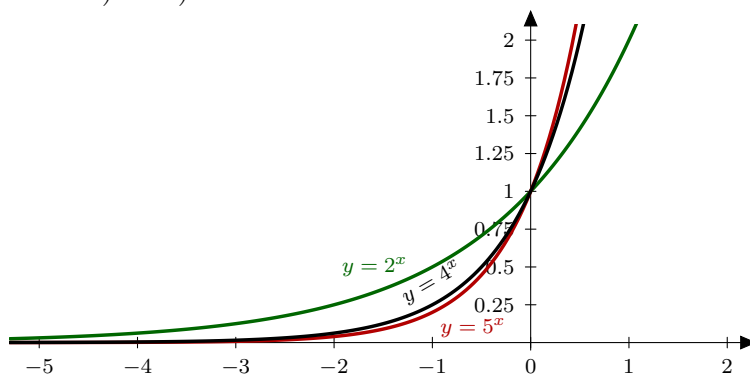
c) lorsque t est grand, la voiture ne vaut plus rien.

2.32 La modélisation est donnée par $Q(t) = Q_0 \cdot 0,5^{t/5730}$. Ainsi, les grottes de Lascaux datent d'environ 12'708 av. J.C.

2.33 a) 118.4 millions ; b) 2008.

2.34 6.4%

2.35 a) et b)



2.36

a) ~ 0.7 dl = 70 ml

b) 2 dl

c) Décroissante. La quantité de glace diminue au fil du temps.

d) $f(x)$ se rapproche de 0. Plus on attend et plus la quantité de glace se rapproche de zéro. Si on attend suffisamment longtemps, il ne devrait plus y avoir de glace du tout.

2.37

- a) $f(0) \cong 0.75$ et $g(0) \cong 0.47$.

Au début de l'année 2000, le pays A comptait environ 750'000 habitants et le pays B en comptait environ 470'000.

- b) C'est le pays A , car $f(10) \cong 1.1$ et $g(10) \cong 0.9$. $f(10)$ est donc plus grand que $g(10)$.
- c) C'est la fonction g . La population du pays B augmente plus rapidement que celle du pays A .
- d) $S = \{15\}$. En début 2015, les populations des deux pays étaient égales.
- e) $S =]15; 30[$. La population du pays A est inférieure à celle du pays B à partir de 2015.

2.38

- a) $f(0) = 50$ donc il y avait 50 bactéries au début de l'expérience.
- b) La solution de l'équation $f(x) = 700$ vaut un peu plus de 75. Il est donc un peu plus de 9 heures et quart.
- c) Le nombre de bactéries a doublé après 20 minutes, et quadruplé après 40 minutes.
- d) Toutes les 20 minutes puisque c'est le temps qu'il faut pour que leur nombre ait doublé.

2.39

- a) $f_A(0) = 500$ et $f_B(0) = 800$.

Au début du placement, on dépose 500 francs sur le compte A et 800 francs sur le compte B .

- b) $S = \{\sim 47\}$

- c) 47 ans

Après 47 ans, il y a autant sur le compte A que sur le compte B .

- d) Après 20 ans, il y a environ 750 francs sur le compte A , car $f_A(20) \cong 750$,
et environ 980 francs sur le compte B , car $f_B(20) \cong 980$.
- e) Il faut environ 35 ans pour le compte A , car $f_A(35) \cong 2 * f_A(0)$,
et environ 70 ans pour le compte B , car $f_B(70) \cong 2 * f_B(0)$.