Chapitre 1

Analyse

1.1 Exponentielles et logarithmes

1.1.1 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{5x}$

b) $f(x) = e^{x^2}$

c) $f(x) = e^{1/x}$

d) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+x}}$

e) $f(x) = \exp\left(\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}\right)$

f) $f(x) = e^{\sin(x)}$

g) $f(x) = x^2\, e^x$

h) $f(x) = e^{-x}\, \cos(x)$

1.1.2 Calculer la dérivée d'ordre n de $f(x) = x\, e^x$.

1.1.3 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 2e^x$

b) $f(x) = e^{2x}$

c) $f(x) = 2 - e^x$

d) $f(x) = e^{2-x}$

1.1.4 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^2 e^x\, dx$

b) $\displaystyle\int_1^2 e^{3\,x-7}\, dx$

c) $\displaystyle\int_0^2 x\, e^{x^2}\, dx$

d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}\, e^{\sqrt{x}}}\, dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 x\, e^x\, dx$

f) $\displaystyle\int_1^{\ln(2)} x^2\, e^x\, dx$

1.1.5 Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x - e^2}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin(x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\, e^x}{1-e^x}$

d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} x\, e^{1/x}$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2x}$

f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2\, e^x - 1}{e^x + 2}$

g) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^2+x)\, e^x$

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2-2x+3}$

1.1.6 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln(5x)$

b) $f(x) = \ln(x-1)$

c) $f(x) = \ln(1-x)$

d) $f(x) = \ln(\mid 1-x \mid)$

e) $f(x) = \ln(x^2-x)$

f) $f(x) = \ln(x-x^2)$

g) $f(x) = \ln(\mid x^2-x \mid)$

h) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2}{1-x}\right)$

i) $f(x) = \ln(\sqrt{3-x^2})$

j) $f(x) = \ln(3\, x^5)$

k) $f(x) = x\ln(x) - x$

l) $f(x) = \ln(\mid \cos(x) \mid)$

m) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

n) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$

1.1.7 Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{3x+2}$

c) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-2x+4}$

d) $f(x) = x^2+x+1+\dfrac{3}{5x-1}$

e) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$

f) $f(x) = \tan(x)$

1.1.8 Lorsqu'elles sont définies, calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_2^5 \frac{dx}{x}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{-3} \frac{dx}{x}$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{4} \frac{dx}{x}$

d) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{2x+3}$

e) $\displaystyle\int_2^6 \frac{8x^3+19x^2+15x+4}{x^2+2x+1}\,dx$

f) $\displaystyle\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}\,dx$

1.1.9 Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x^2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to e} \frac{\ln(x)-1}{x-e}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x^2-3)}{2-x}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)+1}{1-\ln(x)}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln^2(x)}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}$

1.1.10 Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \log_2(2x+3)$

b) $f(x) = \log_3(x^2-2x+1)$

c) $f(x) = 3^{2x-4}$

d) $f(x) = \exp_2(\sqrt{x^2+1})$

1.1.11 Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{8^x-2^x}{4x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\log_5(x+2)}{x+1}$

1.1.12 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^3 4^x\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \exp_2(x^2)\;x\,dx$

1.1.13 Étudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = e^{-x^2}$

b) $f(x) = e^{1/x}$

c) $f(x) = (x^2 - 4x + 4)e^x$

d) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

e) $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{1 - 3e^x}$

f) $f(x) = (x + 2)e^{1/x}$

1.1.14 Étudier les fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 \ln(x)$

b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

c) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$

d) $f(x) = \ln\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)$

e) $f(x) = \dfrac{\ln(x) - 2}{\ln(x) - 1}$

f) $f(x) = \ln(1 + e^x) - x$

1.1.15 Soit les courbes $\gamma_1 : y = e^{-x}$ et $\gamma_2 : y = e^{-x}\cos(x)$.

a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes γ_1 et γ_2 sur $[-\pi; 3\pi]$.

b) Prouver qu'en chacun de ces points, γ_1 et γ_2 sont tangentes.

1.1.16 Déterminer l'équation de la tangente au graphe de $f(x) = 3^x$ en son point d'intersection avec l'axe Oy.

1.1.17 De l'origine, on mène la tangente à la courbe $y = \ln(x)$. Déterminer l'équation de cette tangente, ainsi que les coordonnées de son point de contact avec la courbe.

1.1.18 Soit E et F les points d'inflexion de la courbe $y = \ln(x^2 + 1)$. On fait tourner le morceau de surface limité par le segment EF et la courbe autour de Oy. Calculer le volume du solide ainsi engendré.

1.1.19 Un rectangle $ABCD$ est tel que A et B sont sur Ox, alors que C et D sont sur la courbe $y = e^{-x^2}$. Calculer les coordonnées de ses sommets pour que son aire soit maximum.

1.1.20 Soit la fonction $f(x) = (x^2 + ax + b)e^x$. Déterminer a et b afin que le graphe de la fonction f soit tangent à l'axe Ox en $x = 1$.

1.1.21 Soit les fonctions $f(x) = (x + 1)\, e^{-x}$ et $g(x) = -e^x + a$. Déterminer a de sorte que les graphes de f et g se coupent en l'extremum de f.

1.1.22 Déterminer les coordonnées d'un point P de la courbe $y = 2\ln(x)$ $(x \geq 1)$ de sorte que le triangle délimité par la normale en P à la courbe, la verticale passant par P et l'axe Ox soit d'aire maximale. Calculer cette aire.

1.1.23 Considérons les fonctions $f(x) = (x - 1)\, e^x$ et $g(x) = -e^{x-a} + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer a et b de telle manière que les graphes de f et g se coupent au point d'abscisse 1 à angle droit.

1.1.24 Soit la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{(1 + \ln(x))^2}{x}$$

Déterminer la valeur du nombre réel $k > 1$ pour laquelle l'aire de la région du plan comprise entre la courbe $y = f(x)$ et les droites $x = k$ et $y = 0$ soit égale à $8/3$.

1.1.25 On fait tourner autour de l'axe Ox la surface située sous la courbe $y = 2^{-x}$ et comprise entre les droites $x = -1$ et $x = 1$. Calculer le volume du solide ainsi engendré.

1.1.26 Sous quel angle les courbes $y = e^{x+2}$ et $y = e^{-x}$ se coupent-elles ?

1.1.27 Une étude a montré que l'indice de satisfaction (sur une échelle de 1 à 10) des clients abonnés à un service Internet était donné par la fonction s définie par

$$s(t) = \frac{20\ln(t + 1) + t}{t + 1} \qquad t \geq 1$$

où t représente le nombre de mois écoulés depuis le début de l'abonnement (cette fonction n'est valable qu'à partir de la fin du 1$^{\text{er}}$ mois).

a) Quel est l'indice de satisfaction après 5 mois d'abonnement (réponse à deux décimales) ?

b) Si l'abonnement est conclu le 1$^{\text{er}}$ janvier, au cours de quel mois l'indice de satisfaction est-il maximal ?

c) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t)$.

1.1.28 Dans une école, une étude a montré que le degré d'intérêt (sur une échelle de 1 à 10) des élèves au cours d'une leçon de 45 minutes est donné par la fonction d définie par

$$d(t) = \frac{t \cdot e^{-\frac{t}{30}} + 2}{2}$$

où t représente le nombre de minutes écoulées depuis le début de la leçon.

a) Quel est le degré de motivation des élèves en entrant en classe ?

b) Quel est le degré de motivation des élèves après 20 minutes en classe ?

c) Après combien de minutes le degré maximal est-il atteint ? Donner sa valeur maximale.

1.1.29 La taille d'un arbre est souvent décrite par un modèle logistique. Supposons que la hauteur h (en mètres) d'un arbre de t années est donnée par la relation

$$h = \frac{40}{1 + 200\, e^{-0{,}2t}}$$

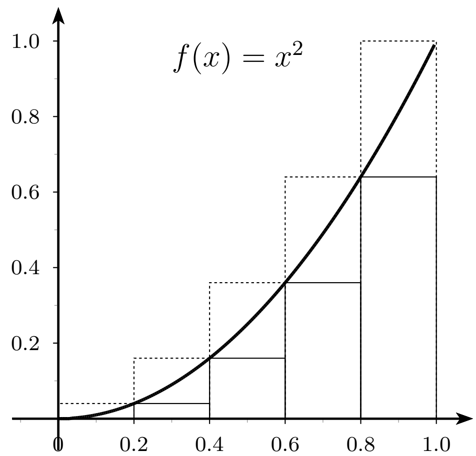
a) Quelle est la hauteur d'un arbre vieux de 30 ans ?

b) A quel âge l'arbre aura-t-il une hauteur de 16m ?

c) Quelle hauteur maximale l'arbre peut-il atteindre ?

1.2 Approche géométrique de l'aire sous une courbe

1.2.1 Soit la fonction $f(x) = x^2$ définie sur l'intervalle $[0; 1]$.
On se propose de calculer l'aire A de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de la fonction représentative de $f(x)$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Pour cela, subdivisons l'intervalle $[0; 1]$ en 5 intervalles d'égale longueur.



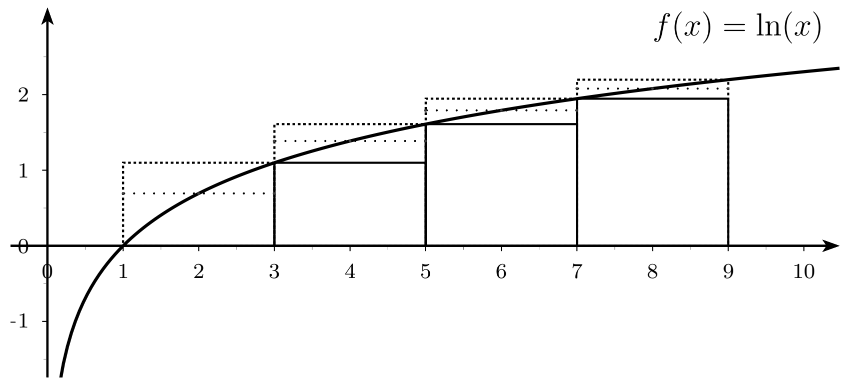
a) Estimer A à l'aide de la somme u_5 des aires des cinq rectangles situés au-dessous de la courbe (le premier rectangle est d'aire nulle), puis à l'aide de la somme v_5 des aires des cinq rectangles situés au-dessus de la courbe.

b) Améliorer l'estimation de A en subdivisant l'intervalle $[0; 1]$ en 10 intervalles d'égale longueur.

c) Calculer u_n et v_n en subdivisant l'intervalle $[0; 1]$ en n intervalles d'égale longueur.

d) Calculer la valeur exacte de A en utilisant les suites u_n, v_n et le théorème des deux gendarmes.

1.2.2 Considérons la fonction $f(x) = \ln(x)$ sur l'intervalle $[1; 9]$. En subdivisant cet intervalle en quatre sous-intervalles d'égale longueur, trouver la somme intégrale inférieure, la somme intégrale supérieure et la somme de Riemann lorsqu'on utilise le point milieu de chacun des sous-intervalles.



1.2.3 Considérer la fonction $f(x) = e^x + 1$ sur l'intervalle $[-1; 2]$. En subdivisant cet intervalle en six sous-intervalles d'égale longueur, trouver la somme intégrale inférieure, la somme intégrale supérieure et la somme de Riemann lorsqu'on utilise le point milieu de chacun des sous-intervalles.

1.2.4 En utilisant une somme de Riemann, trouver une approximation de l'aire sous la courbe $y = x^2 + 1$ entre les verticales $x = 0$ et $x = 2$.

1.2.5 En utilisant une somme de Riemann pour laquelle l'intervalle considéré est divisé en quatre sous-intervalles et où l'on considère le point milieu de chacun de ces sous-intervalles, trouver une valeur approximative de

$$\int_1^3 \frac{8}{x}\, dx$$

1.3 Primitives et intégrales

1.3.1 Pour chacune des questions ci-dessous, montrer que $F(x)$ est une primitive de $f(x)$:

a) $F(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{x^7}}$ et $f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x^9}}$;

b) $F(x) = \dfrac{2x^2-1}{2-x^2} + 7$ et $f(x) = \dfrac{6x}{(2-x^2)^2}$;

c) $F(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x+1}} - 11$ et $f(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{(x+1)^3}}$;

d) $F(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}}$.

1.3.2 Vérifier les égalités suivantes :

a) $\displaystyle\int \left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2x} + \frac{x^2}{4} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$;

b) $\displaystyle\int \left(4x^2 - \frac{7}{3} - \frac{14}{3x^3}\right) dx = \frac{4x^5 - 7x^3 + 7}{3x^2} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$;

c) $\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}\, dx = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$;

d) $\displaystyle\int \frac{2x+7}{\sqrt[3]{(x^2+7x+2)^4}}\, dx = \frac{-3}{\sqrt[3]{x^2+7x+2}} + c$, avec $c \in \mathbb{R}$.

1.3.3 Calculer :

a) $\displaystyle\int 3\, dx$

b) $\displaystyle\int 5x\, dx$

c) $\displaystyle\int (2x+1)\, dx$

d) $\displaystyle\int (5x-4)\, dx$

e) $\displaystyle\int (2x^2 - 3x + 2)\, dx$

f) $\displaystyle\int 5x^3\, dx$

g) $\displaystyle\int (-3x^4)\, dx$

h) $\displaystyle\int (3x^5 + 2x^4 - 1)\, dx$

i) $\displaystyle\int (\cos(x) + \sin(x))\, dx$

j) $\displaystyle\int (1 + \tan^2(x))\, dx$

1.3.4 Calculer :

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2}$

b) $\displaystyle\int \frac{2dx}{x^3}$

c) $\displaystyle\int \frac{-7dx}{x^5}$

d) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx$

e) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}\,dx$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$

g) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

h) $\displaystyle\int \left(\frac{3}{x^4} - \sqrt[4]{x^3}\right) dx$

1.3.5 Calculer :

a) $\displaystyle\int \cos(3x)\,dx$

b) $\displaystyle\int \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) dx$

c) $\displaystyle\int (x+3)^3\,dx$

d) $\displaystyle\int (2x-1)^2\,dx$

e) $\displaystyle\int (7x-2)^5\,dx$

f) $\displaystyle\int (3x^2+x)^3(6x+1)\,dx$

g) $\displaystyle\int (4x^2+3)^4 x\,dx$

h) $\displaystyle\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx$

i) $\displaystyle\int \frac{\tan^2(x)}{\cos^2(x)}\,dx$

j) $\displaystyle\int \sqrt{x+3}\,dx$

k) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$

l) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}\,dx$

1.3.6 Calculer :

a) $\displaystyle\int (3x^2-2x+3)\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{3x^4-3x^2-7}{4x^2}\,dx$

c) $\displaystyle\int 7\sqrt[4]{x^3}\,dx$

d) $\displaystyle\int (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})\,dx$

e) $\displaystyle\int (2\sin(x) - 3\cos(x))\,dx$

f) $\displaystyle\int \cos(2x)\,dx$

g) $\displaystyle\int \left(\frac{5}{\cos^2(x)} + 5\cos(x)\right) dx$

h) $\displaystyle\int \left(8\sin(x) + \frac{4}{\sqrt{2x}}\right) dx$

i) $\displaystyle\int (3x^2-7)^2\,dx$

j) $\displaystyle\int \sqrt{x}(x^2-5)\,dx$

k) $\displaystyle\int (3x-5)^6\,dx$

l) $\displaystyle\int \frac{12}{(4-3x)^4}\,dx$

m) $\displaystyle\int \sqrt[3]{(3x-8)^2}\,dx$

n) $\displaystyle\int \frac{6}{\cos^2(3x)}\,dx$

o) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$

p) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-1}}\,dx$

1.3.7 Trouver l'expression mathématique de la fonction f, sachant que :

a) $f'(x) = 3x^2-4,\ f(5) = 54$;

b) $f''(x) = (x+1)(x-2),\ f(1) = 8,\ f'(0) = 37/6$;

c) $f''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ f'(9) = 2,\ f(1) = 2f(4)$.

1.3.8 Déterminer la primitive F de chaque fonction f ci-dessous, en tenant compte des conditions imposées.

a) $f(x) = 3x^2-6x$ et le terme constant de F est égal à 7 ;

b) $f(x) = \dfrac{18}{x^2} + \sqrt{x}$ et le graphe de F passe par le point $(9;16)$;

c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x<2 \\ 2 & \text{si } 2\leq x\leq 4, \\ 6-x & \text{si } x>4 \end{cases}$ avec $F(0)=1$.

1.3.9 Déterminer la fonction f sachant qu'elle admet pour asymptote la droite

$$x - 2y + 8 = 0$$

et que

$$f''(x) = -\frac{8}{x^3}$$

1.3.10 Calculer :

a) $\displaystyle\int_1^4 (x^2-2x+3)\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 (2x^3+3x^2+2x-1)\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x+1}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin(x)\,dx$

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2(x))\,dx$

f) $\displaystyle\int_{0}^{2} (1+2x)^3\,dx$

g) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

h) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\cos(x)\,dx$

1.3.11 Sachant que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 3$, $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = 4$ et $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx = -8$, calculer :

a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 3f(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^3 8f(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int_3^1 2f(x)\,dx$

1.3.12 Montrer que pour une fonction f continue sur $[-a; a]$, on a :

a) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ lorsque f est paire ;

b) $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ lorsque f est impaire.

1.3.13 Déterminer les réels k pour lesquels on a :

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} kx^2\,dx = \frac{2}{3}$

b) $\displaystyle\int_{4}^{k} (x^2-3x+7)\,dx = \frac{129}{2}$

c) $\displaystyle\int_{0}^{k/2} \cos(t)\,dt = \frac{1}{2}$

d) $\displaystyle\int_{k}^{0} \frac{2}{(x+1)^3}\,dx = -\int_0^k \frac{3}{(x+3)^2}\,dx$

1.3.14 Déterminer la nature des extremums des fonctions suivantes :

a) $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x (t^3-t)\,dt$

b) $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \sqrt{t+1}\,dt$

1.3.15 Calculer les intégrales définies suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x+6}\,dx$

b) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}(x+2)\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5(x)\,\cos(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int_2^{\sqrt{20}} 3x\sqrt{x^2+5}\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$

f) $\displaystyle\int_2^3 \frac{5x-2}{x^2-x}\,dx$

1.3.16 Calculer l'aire du domaine limité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$, et $x = b$:

a) $f(x) = 9 - x^2, \quad a = -4,\, b = 4\,;$

b) $f(x) = \dfrac{4}{x^2} - 1, \quad a = 1,\, b = 4\,;$

c) $f(x) = \cos(3x), \quad a = 0,\, b = \dfrac{\pi}{2}\,;$

d) $f(x) = \sqrt{2x-4}, \quad a = 2,\, b = 10.$

1.3.17 Calculer l'aire du domaine borné limité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe Ox :

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x < -1 \\ -x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

d) $f(x) = -x^2 + 6 \mid x \mid +7$

1.3.18 Déterminer la valeur du nombre réel positif c pour que l'aire du domaine plan limité par l'axe Ox et la parabole d'équation $y = c\,(x^2 - 1)$ soit égale à 5.

1.3.19 Calculer l'aire du domaine borné limité par les graphes des fonctions f et g :

a) $f(x) = x^2 - 3, \quad g(x) = 2x$

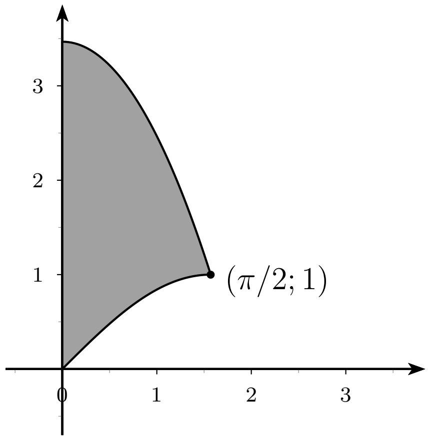
b) $f(x) = x^2, \quad g(x) = 8 - x^2$

c) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x, \quad g(x) = x^3 - 7x^2 + 12x$

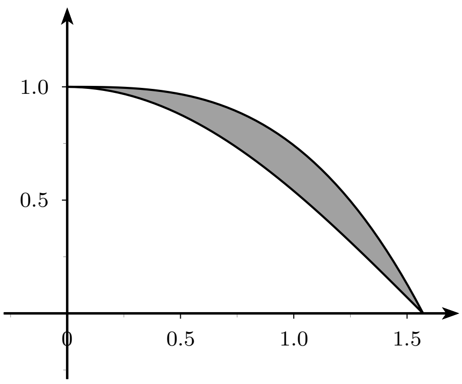
d) $f(x) = x(6 - 2x^2), \quad g(x) = x(2 - x^2)$

1.3.20 Calculer d'abord la valeur du paramètre a, puis l'aire du domaine grisé.

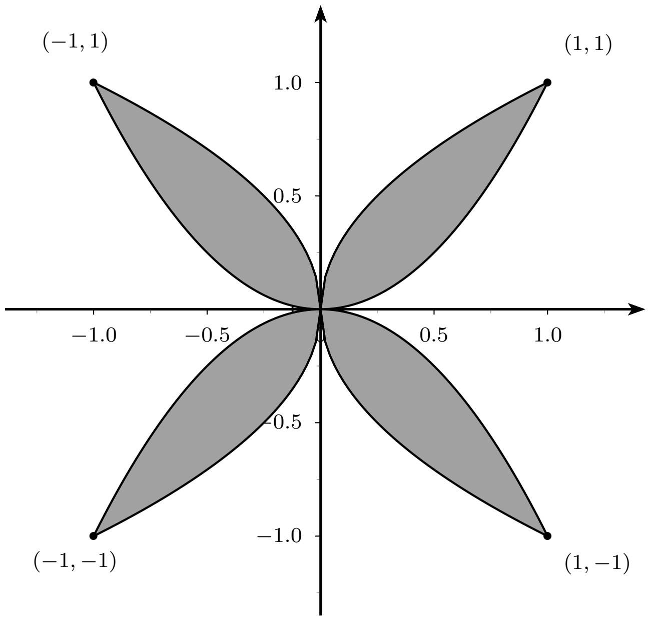
a) $y = \sin(x), \quad y = -x^2 + a$



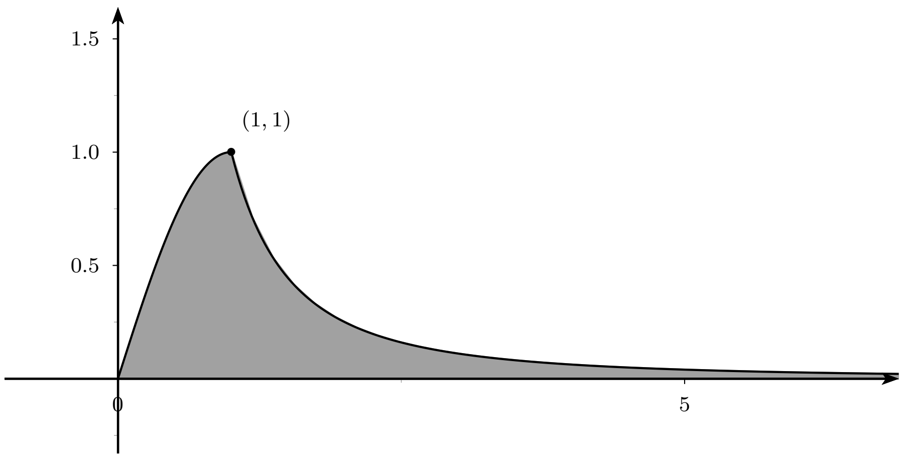
b) $y = \cos(x), \quad y = ax^3 + 1$



c) $y^2 = ax^4, \quad x^2 = y^4$



d) $y = \sin(ax), \quad y = \dfrac{1}{x^2}$



1.3.21 Calculer l'aire du domaine borné limité par les courbes données par les équations

$$y = x^2, \quad y = -1, \quad x = 2 \quad \text{et} \quad x = 5$$

1.3.22 Calculer l'aire du domaine borné limité par les courbes données par les équations

$$y^2 = 4 - x \quad \text{et} \quad y^2 = 4 + x$$

1.3.23 Calculer le réel $m > 0$ de façon que l'aire limitée par les courbes $y = \dfrac{1}{4}x^2$ et $y = mx$ soit égale à 9.

1.3.24 Le domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$ et l'axe Ox tourne autour de cet axe. Calculer son volume, sachant que :

a) $f(x) = x^2 + 2\,x$

b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

1.3.25 Calculer l'aire du domaine borné limité par la courbe d'équation $x = y^2 - 2$ et la droite $y = x$,

a) en prenant x comme variable d'intégration ;

b) en prenant y comme variable d'intégration.

1.3.26 Le domaine délimité par la courbe d'équation $y = f(x)$, l'axe Ox et les droites $x = a$ et $x = b$ tourne autour de l'axe Ox. Esquisser le corps ainsi obtenu et calculer son volume :

a) $f(x) = x + 1, \qquad a = 1,\, b = 3$

b) $f(x) = x^2, \qquad a = 0,\, b = 4$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}, \qquad a = 1,\, b = 2$

d) $f(x) = \cos(x), \qquad a = -\dfrac{\pi}{2},\, b = \dfrac{\pi}{2}$

1.3.27 Le domaine borné délimité par la courbe d'équation

$$y = k\,(1 - k\,x)\,\sqrt{x}$$

pour $k > 0$ et l'axe Ox tourne autour de cet axe. Montrer que le volume du corps ainsi obtenu est indépendant de la valeur du paramètre k.

1.3.28 Le domaine délimité par les courbes d'équations $y = f(x)$, $y = g(x)$ et l'axe Ox tourne autour de cet axe. Calculer son volume :

a) $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2 - 2\,x + 6$ et $g(x) = -x^2 + 10$

1.3.29 La base d'un solide est le disque du plan Oxy centré à l'origine et de rayon 1. Chaque section du solide par un plan perpendiculaire à l'axe Ox est un disque. Après avoir montré que l'aire de la section située à l'abscisse x vaut $A(x) = \pi\,(1 - x^2)$, en déduire par calcul le volume de ce solide.

1.3.30 Les axes de coordonnées et la parabole $y = -x^2 + 2x + 3$ délimitent un domaine contenu dans le premier quadrant. Déterminer l'équation de la droite verticale (valeur approchée) qui partage ce domaine en deux parties de même aire.

1.3.31 On considère le domaine plan limité par les courbes d'équations $y = x^2 + 2$ et $y = 3x$. Poser le calcul permettant de déterminer le volume du solide engendré par la révolution de ce domaine autour de :

a) l'axe Ox ;

b) l'axe Oy ;

c) la droite $x = 1$;

d) la droite $x = 2$;

e) la droite $y = 3$;

f) la droite $y = 6$.

1.3.32 La base d'un solide est délimitée par les courbes d'équations

$$x = y^2 \quad \text{et} \quad x = 9$$

Calculer le volume de ce solide, sachant que chaque section de celui-ci par un plan perpendiculaire à l'axe Ox est :

a) un carré ;

b) un demi-cercle ;

c) un triangle équilatéral ;

d) un trapèze dont la base supérieure mesure la moitié de la base inférieure et dont la hauteur mesure le quart de la base inférieure.

1.3.33 Calculer l'aire du domaine compris entre les droites $x = 1$ et $x = 2$, l'asymptote oblique et le graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$.

1.4 Solutions des exercices

Exponentielles et logarithmes

1.1.1

a) $D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = 5\,e^{5\,x}$

b) $D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2\,x\,e^{x^2}$

c) $D_f = \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = -\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$

d) $D_f =]-\infty;-1] \cup [0;+\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \cdot e^{\sqrt{x^2+x}}$

e) $D_f =]-1;1[, \quad f'(x) = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}} \cdot \dfrac{2x}{(1-x^2)^2} \cdot e^{\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}}$

f) $D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = \cos(x)\,e^{\sin(x)}$

g) $D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = (x^2+2x)e^x$

h) $D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = -(\cos(x)+\sin(x))\,e^{-x}$

1.1.2 $\quad f^{(n)}(x) = e^x\,(x+n)$

1.1.3

a) $2e^x + c$

b) $\dfrac{1}{2}e^{2x} + c$

c) $2x - e^x + c$

d) $-e^{2-x} + c$

1.1.4

a) $e^2 - e$

b) $\dfrac{e^3-1}{3\,e^4}$

c) $\dfrac{e^4-1}{2}$

d) $-2\,(e^{-\sqrt{2}} - e^{-1})$

e) 1

f) $2\ln^2(2) - 4\ln(2) + 4 - e$

1.1.5

a) e^2

b) 1

c) -1

d) $+\infty$

e) $-\infty$

f) 2

g) 0

h) $+\infty$

1.1.6

a) $D_f = \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

b) $D_f =]1;+\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$

c) $D_f =]-\infty;1[, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$

d) $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$

e) $D_f =]-\infty;0[\cup]1;+\infty[, \quad f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$

f) $D_f =]0;1[, \quad f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$

g) $D_f = \mathbb{R}^*\backslash\{1\}, \quad f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x}$

h) $D_f =]-\infty;1[\backslash\{0\}, \quad f'(x) = \dfrac{x-2}{x^2-x}$

i) $D_f =]-\sqrt{3};\sqrt{3}[, \quad f'(x) = \dfrac{x}{x^2-3}$

j) $D_f = \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \dfrac{5}{x}$

k) $D_f = \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \ln(x)$

l) $D_f = \mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad f'(x) = -\tan(x)$

m) $D_f = \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}, \quad f'(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$

n) $D_f = \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}, \quad f'(x) = -\dfrac{\ln(x) + 1}{x^2 \ln^2(x)}$

1.1.7

a) $F(x) = \ln|x+1| + c$

b) $F(x) = \dfrac{1}{3} \ln|3x+2| + c$

c) $F(x) = \dfrac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 4| + c$

d) $F(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{3}{5} \ln|5x-1| + c$

e) $F(x) = \dfrac{1}{2} x^2 + 3\,x + \ln|x-1| + c$

f) $F(x) = -\ln|\cos(x)| + c$

1.1.8

a) $\ln\left(\dfrac{5}{2}\right)$

b) $\ln(3)$

c) non définie

d) $\ln\left(\sqrt{\dfrac{11}{5}}\right)$

e) $140 + \ln\left(\dfrac{7}{3}\right)$

f) $\ln(2)$

1.1.9

a) 1

b) $-1/2$

c) $1/e$

d) -4

e) 0

f) -1

g) 0

h) 0

1.1.10

a) $D_f = \left]-\dfrac{3}{2}; +\infty\right[, \quad f'(x) = \dfrac{2}{(2x+3)\,\ln(2)}$

b) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f'(x) = \dfrac{2}{(x-1)\ln(3)}$

c) $D_f = \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2\,\ln(3)\,e^{(2x-4)\ln(3)}$

d) $D_f = \mathbb{R}$, $\quad f'(x) = \dfrac{x\ln(2)}{\sqrt{x^2+1}}\, e^{\ln(2)\sqrt{x^2+1}}$

1.1.11

a) $\dfrac{\ln(2)}{2}$

b) $\dfrac{1}{\ln(5)}$

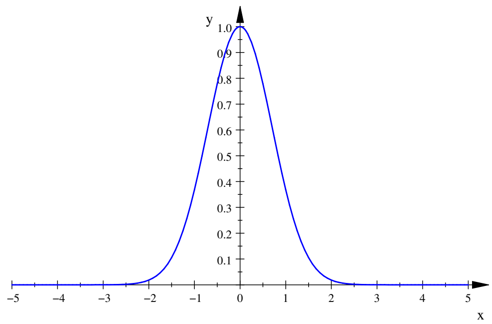
1.1.12

a) $\dfrac{30}{\ln(2)}$

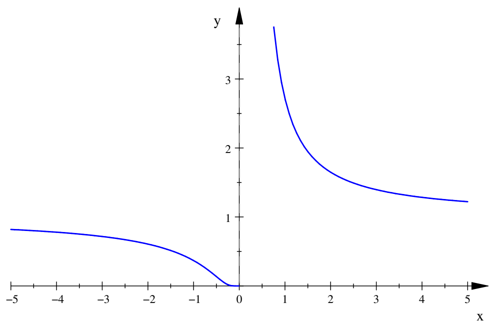
b) 0

1.1.13

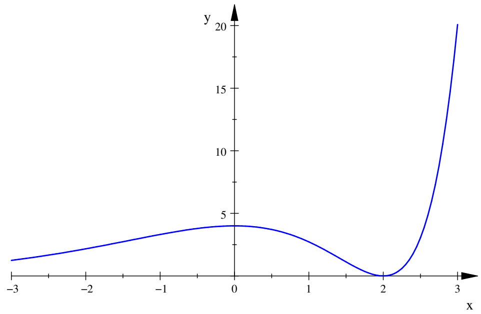
a) $D_f = \mathbb{R}$
Paire
Pas de zéro
AH : $y = 0$
$\delta(x) = e^{-x^2}$
$f'(x) = -2xe^{-x^2}$
Max $(0\,;1)$
$f''(x) = -2e^{-x^2}(1-2x^2)$
PI($-\sqrt{2}/2\,;e^{-1/2}$), PI($\sqrt{2}/2\,;e^{-1/2}$)



b) $D_f = \mathbb{R}^*$
Pas de parité
Pas de zéro
Point limite : $(0;0)$ (à gauche)
AV : $x = 0$ (à droite)
AH : $y = 1$
$\delta(x) = e^{1/x} - 1$
$f'(x) = -\dfrac{e^{1/x}}{x^2}$
$f''(x) = \dfrac{e^{1/x}(2x+1)}{x^4}$
PI($-1/2\,;1/e^2$)

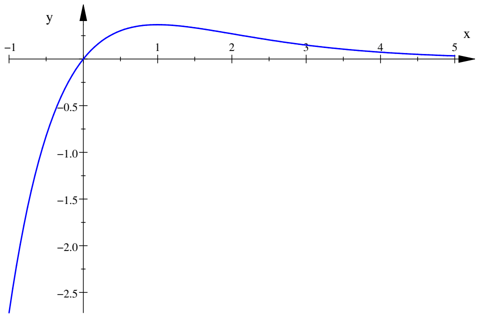


c) $D_f = \mathbb{R}$
Pas de parité
Zéro : $x = 2$
AH : $y = 0$ (vers $-\infty$)
$f'(x) = x(x-2)e^x$
Max $(0\,;4)$ et Min $(2\,;0)$
$f''(x) = e^x(x^2-2)$
PI($-\sqrt{2}\,;(6+4\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}}$)
et PI($\sqrt{2}\,;(6-4\sqrt{2})e^{\sqrt{2}}$)



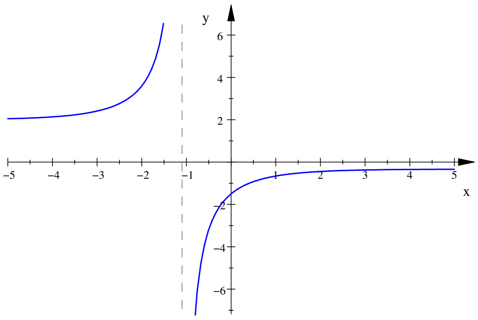
d)

$D_f = \mathbb{R}$
Pas de parité
Zéro : $x = 0$
AH : $y = 0$ (vers $+\infty$)
$\delta(x) = \dfrac{x}{e^x}$ (vers $+\infty$)
$f'(x) = (1-x)e^{-x}$
Max (1 ;1/e)
$f''(x) = \dfrac{x-2}{e^x}$
PI(2 ;2/e^2)



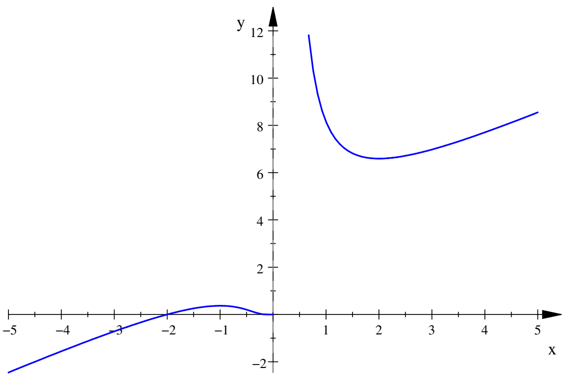
e)

$D_f = \mathbb{R}\backslash\{-\ln(3)\}$
Pas de parité
Pas de zéro
AV : $x = -\ln(3)$
AH : $y = \begin{cases} 2 & (\text{vers } -\infty) \\ -1/3 & (\text{vers } +\infty) \end{cases}$
$\delta(x) = \begin{cases} \dfrac{7e^x}{1-3e^x} & (\text{vers } -\infty) \\ \dfrac{7}{3(1-3e^x)} & (\text{vers } +\infty) \end{cases}$
$f'(x) = \dfrac{7e^x}{(1-3e^x)^2}$
$f''(x) = \dfrac{7e^x(3e^x+1)}{(1-3e^x)^3}$



f)

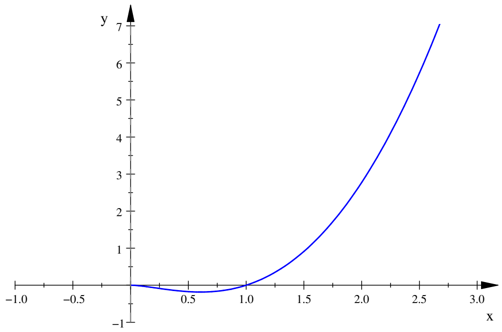
$D_f = \mathbb{R}^*$
Pas de parité
Zéro : $x = -2$
Point limite : $(0;0)$ (à gauche),
AV : $x = 0$ (à droite) ; AO : $y = x + 3$
$\delta(x) = (x+2)e^{1/x} - x - 3$
$f'(x) = \dfrac{e^{1/x}(x^2-x-2)}{x^2}$
Max(-1 ;1/e) et Min(2 ;4$\sqrt{e}$)
$f''(x) = \dfrac{e^{1/x}(5x+2)}{x^4}$
PI(-2/5 ;8/5$e^{-5/2}$)



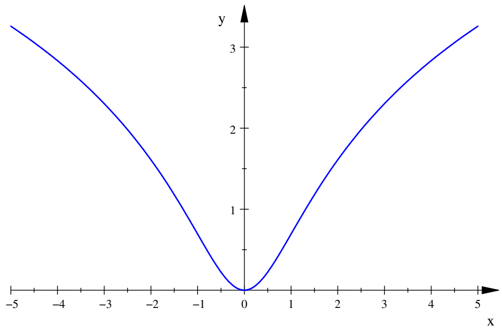
1.1.14

a)

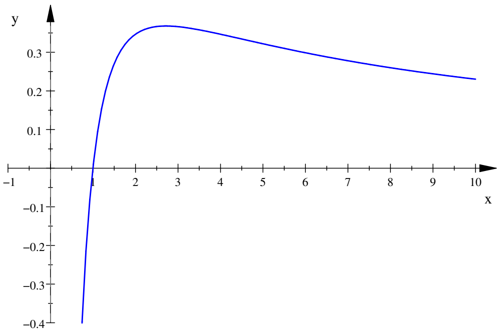
$D_f = \mathbb{R}_+^*$
Pas de parité
Zéro : $x = 1$
Pas d'asymptote,
point limite : $(0; 0)$ (à droite)
$f'(x) = x(2\ln(x) + 1)$
Min$(e^{-1/2}$;-$1/2e^{-1})$
$f''(x) = 2\ln(x) + 3$
PI$(e^{-3/2}$;-$3/2e^{-3})$



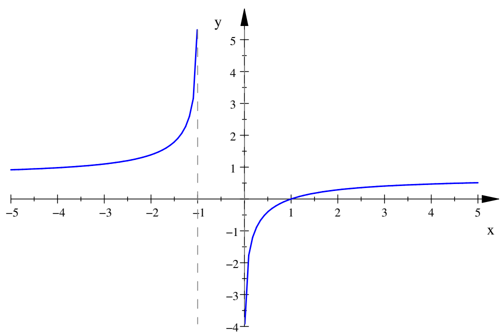
b) $D_f = \mathbb{R}$
Paire
Zéro : $x = 0$
Pas d'asymptote
$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$
Min $(0; 0)$
$f''(x) = \dfrac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$
PI$(-1$;ln(2)) et PI(1 ;ln(2))



c) $D_f = \mathbb{R}_+^*$
Pas de parité
Zéro : $x = 1$
AV : $x = 0$ (à droite)
AH : $y = 0$ (vers $+\infty$)
$\delta(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ (vers $+\infty$)
$f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$
Max $(e; 1/e)$
$f''(x) = \dfrac{2\ln(x)-3}{x^3}$
PI$(e^{3/2}$;$3/2e^{-3/2})$

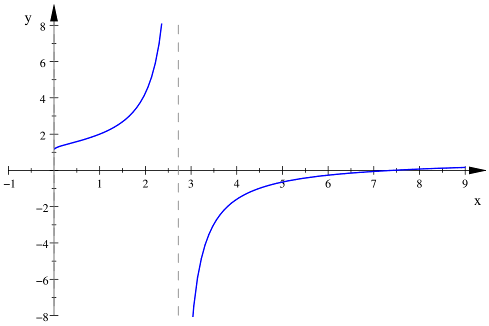


d) $D_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$
Pas de parité
Zéro : $x = 1$
AV : $x = -1$(à gauche) et $x = 0$ (à droite)
AH : $y = \ln(2)$
$\delta(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$
$f'(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$
$f''(x) = -\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$

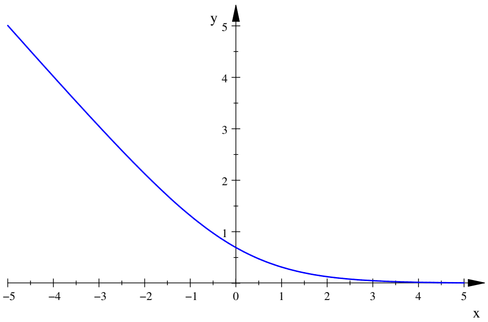


e)

$D_f = \mathbb{R}_+^* \backslash \{e\}$
Pas de parité
Zéro : $x = e^2$
AV : $x = e$, point limite : $(0; 1)$ (à droite)
AH : $y = 1$ (vers $+\infty$)
$\delta(x) = -\dfrac{1}{\ln(x) - 1}$ (vers $+\infty$)
$f'(x) = \dfrac{1}{x(\ln(x) - 1)^2}$
$f''(x) = -\dfrac{\ln(x) + 1}{x^2(\ln(x) - 1)^3}$
PI(1/e ;3/2)



f) $D_f = \mathbb{R}$
Pas de parité
Pas de zéro
AO : $y = -x$ (vers $-\infty$)
AH : $y = 0$ (vers $+\infty$)
$\delta(x) = \begin{cases} \ln((1 + e^x)) & (\text{vers } -\infty) \\ f(x) & (\text{vers } +\infty) \end{cases}$
$f'(x) = -\dfrac{1}{e^x + 1}$
$f''(x) = \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2}$



1.1.15

a) $(0; 1)$ et $(2\pi; e^{-2\pi})$ b) –

1.1.16 $\ln(3)\, x - y + 1 = 0$

1.1.17 $x - e\, y = 0$ et $(e; 1)$.

1.1.18 $\pi(1 - \ln(2))$.

1.1.19 $A\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $B\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $C\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{e}}{e}\right)$, $D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{e}}{e}\right)$

1.1.20 $a = -2$, $b = 1$

1.1.21 $a = 2$

1.1.22 Les coordonnées sont $(e^2; 4)$ et l'aire vaut $16/e^2$ unités carrées.

1.1.23 $a = 2$, $b = 1/e$

1.1.24 $k = e$

1.1.25 Le volume vaut $\dfrac{15\,\pi}{8\ln(2)}$ unités cubes.

1.1.26 $\sim 40.40^{\circ}$

1.1.27 –

1.1.28 –

1.1.29 a) Un arbre de 30 ans mesure environ 26.74 m ; b) après 24 ans et demi, l'arbre mesurera 16 m ; c) la hauteur maximale qu'un arbre peut atteindre est de 40 m.

Approche géométrique de l'aire sous une courbe

1.2.1

a) $u_5 = 0.24$ et $v_5 = 0.44$

b) $u_{10} = 0.285$ et $v_{10} = 0.385$

c) $u_n = \dfrac{(n-1)(2\,n-1)}{6\,n^2}$ et $v_n = \dfrac{(n+1)(2\,n+1)}{6\,n^2}$
$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant A \leqslant v_n$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = \dfrac{1}{3}$, on a donc $A = \dfrac{1}{3}$.

1.2.2
Somme intégrale inférieure : $s_4 = 2\,(\ln(1) + \ln(3) + \ln(5) + \ln(7)) \cong 9.308$
Somme intégrale supérieure : $S_4 = 2\,(\ln(3) + \ln(5) + \ln(7) + \ln(9)) \cong 13.702$
Somme de Riemann : $S_R = 2\,(\ln(2) + \ln(4) + \ln(6) + \ln(8)) \cong 11.901$

1.2.3
La fonction $f(x) = e^x + 1$ est toujours croissante, donc la valeur minimale sur un intervalle est toujours à l'extrémité gauche et la valeur maximale est à l'extrémité droite.
Somme intégrale inférieure : $s_6 \cong 8.412$
Somme intégrale supérieure : $S_6 \cong 11.922$
Somme de Riemann : $S_R \cong 9.949$

1.2.4
Par exemple, en divisant l'intervalle $[0;2]$ en quatre sous-intervalles d'égale longueur, on trouve :
$S_R = f(1/4) \cdot 1/2 + f(3/4) \cdot 1/2 + f(5/4) \cdot 1/2 + f(7/4) \cdot 1/2 = 37/8 = 4.625$

1.2.5
$S_R \cong 8.718$

Primitives et intégrales

1.3.1 –

1.3.2 –

1.3.3

a) $3x + c$

b) $\frac{5}{2}x^2 + c$

c) $x^2 + x + c$

d) $\frac{5}{2}x^2 - 4x + c$

e) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + c$

f) $\frac{5}{4}x^4 + c$

g) $-\frac{3}{5}x^5 + c$

h) $\frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{5}x^5 - x + c$

i) $\sin(x) - \cos(x) + c$

j) $\tan(x) + c$

1.3.4

a) $-\frac{1}{x} + c$

b) $-\frac{1}{x^2} + c$

c) $\frac{7}{4x^4} + c$

d) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

e) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$

f) $2\sqrt{x} + c$

g) $3\sqrt[3]{x} + c$

h) $-\frac{1}{x^3} - \frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + c$

1.3.5

a) $\frac{1}{3}\sin(3x) + c$

b) $-\frac{1}{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + c$

c) $\frac{1}{4}(x+3)^4 + c$

d) $\frac{1}{6}(2x-1)^3 + c$

e) $\frac{1}{42}(7x-2)^6 + c$

f) $\frac{1}{4}(3x^2+x)^4 + c$

g) $\frac{1}{40}(4x^2+3)^5 + c$

h) $\frac{1}{3}\sin^3(x) + c$

i) $\frac{1}{3}\tan^3(x) + c$

j) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+3)^3} + c$

k) $\frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + c$

l) $\sqrt{x^2+2x} + c$

1.3.6

a) $x^3 - x^2 + 3x + c$

b) $\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{7}{4x} + c$

c) $4\sqrt[4]{x^7} + c$

d) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$

e) $-2\cos(x) - 3\sin(x) + c$

f) $\frac{1}{2}\sin(2x) + c$

g) $5\tan(x) + 5\sin(x) + c$

h) $-8\cos(x) + 4\sqrt{2x} + c$

i) $\frac{9}{5}x^5 - 14x^3 + 49x + c$

j) $\frac{2}{7}\sqrt{x^7} - \frac{10}{3}\sqrt{x^3} + c$

k) $\frac{1}{21}(3x-5)^7 + c$

l) $\frac{4}{3(4-3x)^3} + c$

m) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{(3x-8)^5} + c$

n) $2\tan(3x) + c$

o) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c$

p) $2\sqrt{x^2 - x - 1} + c$

1.3.7

a) $f(x) = x^3 - 4x - 51$

b) $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{37}{6}x + \frac{35}{12}$

c) $f(x) = \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - 4x + 8$

1.3.8

a) $F(x) = x^3 - 3x^2 + 7$

b) $F(x) = -\frac{18}{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

c) $F(x) = \begin{cases} x^2/2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ -x^2/2 + 6\,x - 9 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

1.3.9 $f(x) = \dfrac{x^2 + 8x - 8}{2x}$

1.3.10

a) 15

b) 0

c) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}$

d) $\sqrt{2}$

e) 1

f) 78

g) 2

h) $\frac{1}{3}$

1.3.11

a) 7

b) 9

c) -8

d) 8

1.3.12 –

1.3.13

a) $k = 2/9$

b) $k = 7$

c) $k \in \{\pi/3 + l \cdot 4\pi \mid l \in \mathbb{Z}\} \cup \{5\pi/3 + l \cdot 4\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}$

d) $k \in \{-5/3; 0\}$

1.3.14

a) La fonction admet un minimum en $(-1; -1/4)$, un maximum en $(0; 0)$, et un minimum en $(1; -1/4)$.

b) La fonction admet un minimum en $(-1; -2/3)$.

1.3.15

a) $1 + 6 \ln\left(\frac{7}{8}\right)$

b) $\dfrac{352}{15}$

c) $\dfrac{1}{6}$

d) 98

e) $\dfrac{9\pi}{4}$

f) $\ln(18)$

1.3.16

a) $\dfrac{128}{3}$ b) 2 c) 1 d) $\dfrac{64}{3}$

1.3.17

a) $\dfrac{37}{12}$ b) $\dfrac{16}{3}$ c) $\dfrac{3}{4}$ d) $\dfrac{490}{3}$

1.3.18 $c = \dfrac{15}{4}$

1.3.19

a) $\dfrac{32}{3}$ b) $\dfrac{64}{3}$ c) 9 d) 8

1.3.20

a) $a = 1 + \dfrac{\pi^2}{4}$, aire : $\dfrac{\pi^3 + 6\pi - 12}{12}$

b) $a = -\dfrac{8}{\pi^3}$, aire : $\dfrac{3\pi}{8} - 1$

c) $a = 1$, aire : $\dfrac{4}{3}$

d) $a = \frac{\pi}{2}$, aire : $\frac{2}{\pi} + 1$

1.3.21 42

1.3.22 $\frac{64}{3}$

1.3.23 $m = \frac{3}{2}$

1.3.24

a) $\frac{16}{15}\,\pi$

b) $\frac{4}{3}\,\pi$

1.3.25 $\frac{9}{2}$

1.3.26

a) $\frac{56}{3}\,\pi$

b) $\frac{1\,024}{5}\,\pi$

c) $\frac{\pi}{6}$

d) $\frac{\pi^2}{2}$

1.3.27 –

1.3.28

a) $\frac{3}{10}\,\pi$

b) $135\,\pi$

1.3.29 $\frac{4}{3}\,\pi$

1.3.30 $x \approx 1.2091$

1.3.31

a) $\pi \int_1^2 ((3x)^2 - (x^2+2)^2)\,dx = \frac{22}{15}\,\pi$

b) $\pi \int_3^6 ((\sqrt{y-2})^2 - (y/3)^2)\,dy = \frac{\pi}{2}$

c) $\pi \int_3^6 ((\sqrt{y-2}-1)^2 - (y/3-1)^2)\,dy = \frac{\pi}{6}$

d) $\pi \int_3^6 ((2-y/3)^2 - (2-\sqrt{y-2})^2)\,dy = \frac{\pi}{6}$

e) $\pi \int_1^2 ((3x-3)^2 - (x^2+2-3)^2)\,dx = \frac{7}{15}\,\pi$

f) $\pi \int_1^2 ((6-(x^2+2))^2 - (6-3x)^2)\,dx = \dfrac{8}{15}\,\pi$

1.3.32

a) 162

b) $\dfrac{81}{4}\,\pi$

c) $\dfrac{81\sqrt{3}}{2}$

d) $\dfrac{243}{8}$

1.3.33 $\dfrac{1}{2}$