août 2011

a) $x^2-6x+9+y^2+4y+4 = 12+9+4$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2 = 25$

$\Rightarrow C(3;-2)$ et $r = 5u$

b) $A \in \mathcal{C}\,(?)$: $9+16=25$ ✓ $\Rightarrow A \in \mathcal{C}$

équ. dédoublée $(x-3)(x-3)+(y+2)(y+2)=25$

$\Rightarrow (a):\ 3(x-3)+4(y+2)=25$

$\Leftrightarrow 3x-9+4y+8=25 \quad \Leftrightarrow (a):\ 3x+4y-26=0$

c) $x = 3+5=8$ ou $\underbrace{x=3-5=-2}$

$(b):\ x=-2$

$a \cap b$: $\begin{cases} 3x+4y=26 \\ x=-2 \end{cases}$ $\quad -6+4y=26 \quad \Leftrightarrow 4y=32$

$\Leftrightarrow y=8$

$\Rightarrow I(-2;8)$

Les intégrales

Rappels

Formule pour calculer $1+2+3+\ldots+n = \sum_{i=1}^{n} i$

① $\sum_{i=1}^{n}(i+1)^2 = 2^2+3^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} i^2}_{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2} + (n+1)^2 - 1^2$

② $\sum_{i=1}^{n}(i+1)^2 = \sum_{i=1}^{n}(i^2+2i+1) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2i + \sum_{i=1}^{n} 1$

① = ② $\Rightarrow \cancel{\sum_{i=1}^{n} i^2} + (n+1)^2 - 1 = \cancel{\sum_{i=1}^{n} i^2} + \sum_{i=1}^{n} 2i + \sum_{i=1}^{n} 1$

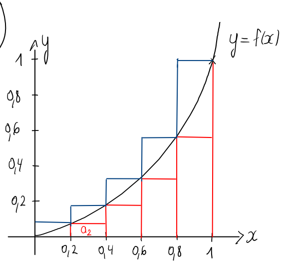
$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} 2i = (n+1)^2 - 1 - \sum_{i=1}^{n} 1$

$\Leftrightarrow 2\sum_{i=1}^{n} i = n^2+2n+\cancel{1}-\cancel{1} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{1+1+\ldots+1\ (n \text{ termes}) \,=\, n} = n^2+2n-n = n^2+n$

$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}}$

De même on montre que $\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

1.2.1



$F(x) = x^2$

a) aires des rectangles "rouges"

$a_1 = 0 \qquad a_2 = 0{,}2\cdot 0{,}2^2 = 0{,}008 \qquad a_3 = 0{,}2\cdot 0{,}4^2 = 0{,}032$

$a_4 = 0{,}2\cdot 0{,}6^2 = 0{,}072 \qquad a_5 = 0{,}2\cdot 0{,}8^2 = 0{,}128$

$U_5 = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = 0{,}24$

aire des rectangles "bleus"

$b_1 = a_2 = 0{,}008 \qquad b_2 = a_3 = 0{,}032 \qquad b_3 = a_4 = 0{,}072 \qquad b_4 = a_5 = 0{,}128$

$b_5 = 0{,}2\cdot 1^2 = 0{,}2$

$V_5 = b_1+b_2+b_3+b_4+b_5 = U_5 + b_5 = 0{,}44$

$\Rightarrow 0{,}24 \leq A \leq 0{,}44$

pour deman a) et b) 1.2.1

b) aire des rectangles inférieurs:

$a_1 = 0 \qquad a_2 = 0,1 \cdot 0,1^2 = 0,001 \qquad a_3 = 0,1 \cdot 0,2^2 = 0,004$

$a_4 = 0,1 \cdot 0,3^2 = 0,009 \qquad a_5 = 0,1 \cdot 0,4^2 = 0,016 \qquad a_6 = 0,1 \cdot 0,5^2 = 0,025$

$a_7 = 0,1 \cdot 0,6^2 = 0,036 \qquad a_8 = 0,1 \cdot 0,7^2 = 0,049 \qquad a_9 = 0,1 \cdot 0,8^2 = 0,064$

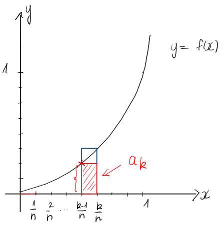
$a_{10} = 0,1 \cdot 0,9^2 = 0,081$

$$U_{10} = \sum_{i=1}^{10} a_i = 0,285$$

$$\Rightarrow \quad 0,285 \leq A \leq 0,385$$

$$V_{10} = U_{10} + 0,1 \cdot 1^2 = 0,385$$

c)



$f(x) = x^2$

$$a_k = \frac{1}{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{k^2-2k+1}{n^3}$$

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2-2k+1}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k^2-2k+1)$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n}(-2k) + \sum_{k=1}^{n} 1\right]$$

$$= \frac{1}{n^3}\left[\sum_{k=1}^{n} k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1\right]$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2\,\frac{n(n+1)}{2} + n\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(2n^2+3n+1)}{6} - \frac{3 \cdot 2n(n+1)}{3 \cdot 2} + \frac{n \cdot 6}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(\frac{2n^3+3n^2+n - 6n^2-6n+6n}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(\frac{2n^3-3n^2+n}{6}\right) = \frac{\cancel{n}(2n^2-3n+1)}{6n^{\cancel{3}2}} = \frac{2n^2-3n+1}{6n^2}$$

$$V_n = U_n + \frac{1}{n} \cdot 1 = \frac{2n^2-3n+1}{6n^2} + \frac{1}{n} = \frac{2n^2-3n+1+6n}{6n^2}$$

$$V_n = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}$$

$$\frac{2n^2-3n+1}{6n^2} \leq A \leq \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}$$

d)

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{2}^{1}\cancel{n^2}}{\cancel{6}_{3}\cancel{n^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{2}^{1}\cancel{n^2}}{\cancel{6}_{3}\cancel{n^2}} = \frac{1}{3}$$

par le théorème des deux gendarmes $A = \frac{1}{3}a^2$

Primitives

Définition: une fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I si $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

Exemple: $f(x) = 2x$ alors $F(x) = x^2$ est une primitive et $F(x) = x^2+1$ aussi.

De manière générale la primitive de $f(x) = 2x$ vaut $F(x) = x^2 + c \quad (c \in \mathbb{R})$

Théorème

Soit F une primitive de f sur un intervalle I, alors les fonctions G définies par

$$G(x) = F(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

représentent toutes les primitives de f sur I.

Notation: $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ où $F'(x) = f(x)$

1.3.1

a) $F(x) = \frac{-2}{\sqrt{x^7}} \qquad f(x) = \frac{7}{\sqrt{x^9}}$

$$F(x) = \frac{-2}{x^{7/2}} = -2x^{-7/2} \qquad (x^n)' = n\,x^{n-1}$$

$$F'(x) = -2\left(-\frac{7}{2}\right)x^{-7/2-1} = 7x^{-9/2} = \frac{7}{x^{9/2}} = \frac{7}{\sqrt{x^9}}$$

1.3.1

a) $F(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{x^7}}$ $\qquad f(x) = \dfrac{7}{\sqrt{x^9}}$

$$F(x) = \frac{-2}{x^{7/2}} = -2\,x^{-7/2}$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$F'(x) = -2\left(-\frac{7}{2}\right)x^{-7/2-1} = 7\,x^{-9/2} = \frac{7}{x^{9/2}} = \frac{7}{\sqrt{x^9}}$$

b) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

pour lundi 1.3.1 b) c)