

$$g) \int \left(\frac{5}{\cos^2(x)} + 5 \cos(x) \right) dx = 5 \tan(x) + 5 \sin(x) + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$h) \int \left(8 \sin(x) + \frac{4}{\sqrt{2x}} \right) dx = \int (8 \sin(x) + 2 \cdot \underbrace{2}_{u'} \cdot \underbrace{(2x)^{-1/2}}_u) dx$$

$$= 8 \cos(x) + 2 \cdot 2 \cdot (2x)^{1/2} + C = -8 \cos(x) + 4 \sqrt{2x} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$i) \int (3x^2 - 7)^2 dx = \int (9x^4 - 42x^2 + 49) dx = 9 \cdot \frac{1}{5} x^5 - 42 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 49x + C$$

$$= \frac{9}{5} x^5 - 14x^3 + 49x + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$j) \int \sqrt{x} (x^2 - 5) dx = \int x^{1/2} (x^2 - 5) dx = \int (x^{5/2} - 5x^{1/2}) dx$$

$$= \frac{2}{7} x^{7/2} - 5 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + C = \frac{2}{7} \sqrt{x^7} - \frac{10}{3} \sqrt{x^3} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$k) \frac{1}{3} \int \underbrace{3}_{u'} \cdot \underbrace{(3x-5)^6}_u dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} (3x-5)^7 + C = \frac{1}{21} (3x-5)^7 + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$l) \int \frac{12}{(4-3x)^4} dx = \frac{12}{(-3)} \int \underbrace{(-3)}_{u'} \cdot \underbrace{(4-3x)^{-4}}_u dx = -4 \frac{1}{(-3)} (4-3x)^{-3} + C$$

$$= \frac{4}{3(4-3x)^3} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$(-4) \int (-3) (4-3x)^{-4} dx$

$$m) \frac{1}{3} \int \underbrace{3}_{u'} \cdot \underbrace{(3x-8)^{2/3}}_u dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5/3} (3x-8)^{5/3} + C = \frac{1}{5} \sqrt[3]{(3x-8)^5} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

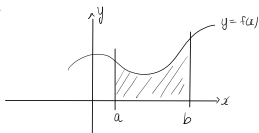
$$n) \int \frac{6}{\cos^2(\underbrace{3x}_u)} dx = \frac{6}{3} \int 3 \cdot \frac{1}{\cos^2(3x)} dx = 2 \tan(3x) + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

prochain test : géométrie analytique
intégrale généralisée

lundi 10.11

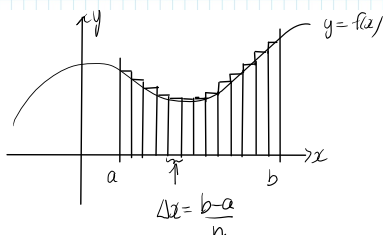
Intégrales définies

Soit une fonction f continue et non négative sur un intervalle $[a, b]$.



Pour calculer l'aire comprise entre la courbe et l'axe Ox ,
on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n parties de même largeur.
La largeur d'une partie vaut $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Pour calculer l'aire comprise entre la courbe et l'axe Δx ,
on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n parties de même largeur.
La largeur d'une partie vaut $\Delta x = \frac{b-a}{n}$



Dans chaque intervalle on choisit une abscisse x_i ;

l'aire de chaque rectangle vaut $f(x_i) \cdot \Delta x$

Ainsi l'aire totale vaut $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$

Pour obtenir l'aire exacte on fait tendre vers l'infini:

$$\Rightarrow A = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Définition: l'intégrale définie de la fonction continue f entre a et b est donnée par

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$$

Théorème fondamental du calcul intégral

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.

1) Si G est la fonction définie par

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

alors G est une primitive de f sur $[a, b]$.

2) Si F est une primitive de f sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Examples:

$$a) \int_2^3 x^3 dx = \left. \frac{1}{4} x^4 \right|_2^3 = \frac{1}{4} 3^4 - \frac{1}{4} 2^4 = \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = \frac{65}{4}$$

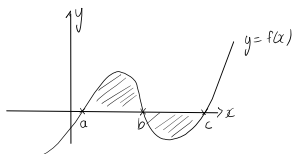
$$b) \int_0^5 (3x^2 - 4x + 5) dx = x^3 - 2x^2 + 5x \bigg|_0^5 = 125 - 50 + 25 - (0 - 0 + 0) \\ = 100$$

1.3.6

$$\begin{aligned}
 \text{o) } \int x \sqrt{x^2+1} \, dx &= \frac{1}{2} \int \underbrace{2x}_{u'} \underbrace{(x^2+1)^{1/2}}_u \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (x^2+1)^{3/2} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} + C \quad (C \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{p) } \int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-1}} \, dx &= \int \underbrace{(2x-1)}_{u'} \underbrace{(x^2-x-1)^{-1/2}}_u \, dx \\
 &= 2 (x^2-x-1)^{1/2} + C = 2 \sqrt{x^2-x-1} + C \quad (C \in \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

Aire d'une surface bornée par des courbes



Pour calculer l'aire entre l'axe Ox , il faut différencier les parties situées au-dessus de l'axe Ox de celles situées au-dessous.

$$\int_a^b f(x) \, dx > 0 \qquad \int_b^c f(x) \, dx < 0$$

Théorème

- 1) Si f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$, alors l'aire A de la surface plane D bornée par l'axe Ox , les verticales $x=a$ et $x=b$ ainsi que la courbe $y=f(x)$ vaut

$$A = \int_a^b f(x) \, dx$$

- 2) Si f est une fonction continue et négative sur l'intervalle $[a, b]$, alors l'aire A vaut :

$$A = |I| \quad \text{avec} \quad I = \int_a^b f(x) \, dx$$

- 3) Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et s'annule en $m \in]a, b[$; alors l'aire A vaut :

$$A = |I| + |J| \quad \text{avec} \quad I = \int_a^m f(x) \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_m^b f(x) \, dx$$

1.3.7

$$\text{a) } f(x) = \int (3x^2 - 4) \, dx = x^3 - 4x + C$$

$$f(5) = 125 - 20 + C = 54 \quad \Leftrightarrow \quad C = 54 - 105 = -51$$

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 4x - 51$$

1.3.10

$$\text{a) } \int_1^4 (x^2 - 2x + 3) \, dx = \left. \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x \right|_1^4 = \frac{64}{3} - 16 + 12 - \left(\frac{1}{3} - 1 + 3 \right)$$

$$= \frac{64}{3} - 4 - \frac{1}{3} - 2 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} - 6 = \frac{63}{3} - 6 = 21 - 6 = 15$$

1.3.10

$$b) \int_{-1}^1 (2x^3 + 3x^2 + 2x - 1) dx = \left. \frac{1}{2}x^4 + x^3 + x^2 - x \right|_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{2} + 1 + 1 - 1 - \left(\frac{1}{2} - 1 + 1 + 1 \right) = \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = 0$$

$$c) \int_{-1}^1 \sqrt[3]{x+1} dx = \int_{-1}^1 \underbrace{(x+1)}_u^{1/3} dx = \frac{3}{4} (x+1)^{4/3} \Big|_{-1}^1$$

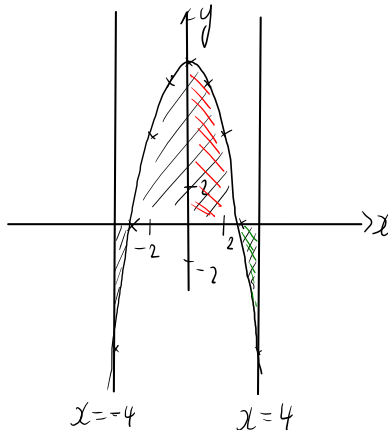
$u' = 1$

$$= \frac{3}{4} \sqrt[3]{(x+1)^4} \Big|_{-1}^1 = \frac{3}{4} \sqrt[3]{2^4} - \frac{3}{4} \cdot 0 = \frac{3}{4} \sqrt[3]{16} = \frac{3}{4} \sqrt[3]{8 \cdot 2}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2}$$

1.3.16

a) $f(x) = 9 - x^2$ $x = -4$ $x = 4$ zeros: $x = -3$ $x = 3$



$$\int_0^3 f(x) dx$$

$$\int_3^4 f(x) dx$$