Fonctions exponentielles et logarithmes

Exercice 1.

a) $2\int_0^2 \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x+3|\Big|_0^2 =$

$2[\ln(5)-\ln(3)] = \boxed{2\ln\left(\frac{5}{3}\right)}$

b) $\int_3^5 \left(x-3-\frac{3}{x-2}\right)\,\mathrm{d}x =$

$\frac{1}{2}x^2-3x-3\ln|x-2|\Big|_3^5 = \boxed{2-3\ln(3)}$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -5 & 3 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{-3} \end{array}$$

$3\int_0^4 \frac{1}{x+4}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x+4|\Big|_0^4 =$

$3[\ln(8)-\ln(4)] = \boxed{3\ln(2)}$

$\int_{-1}^3 \left(x+2-\frac{7}{x+2}\right)\,\mathrm{d}x =$

$\frac{1}{2}x^2+2x-7\ln|x+2|\Big|_{-1}^3 = \boxed{12-7\ln(5)}$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 4 & -3 \\ -2 & & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{-7} \end{array}$$

Exercice 2.

a) $x-4>0 \quad\Rightarrow\quad x>4$

$\Rightarrow \boxed{\mathrm{ED}(f) =]4;+\infty[}$

b) zéro de f : $x=5$

x	$-\infty$	4		5		$+\infty$
$f(x)$			$-$	0	$+$	

c) $f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-4} \qquad f'(5) = \frac{1}{2}$

$f(5)=0 \quad\Rightarrow\quad T(5;0)$

$(t)\;:y-0=\frac{1}{2}(x-5) \Rightarrow \boxed{(t)\;:y=\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}}$

$x-3>0 \quad\Rightarrow\quad x>3$

$\Rightarrow \boxed{\mathrm{ED}(f) =]3;+\infty[}$

zéro de f : $x=4$

x	$-\infty$	3		4		$+\infty$
$f(x)$			$-$	0	$+$	

$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3} \qquad f'(4) = \frac{1}{2}$

$f(4)=0 \quad\Rightarrow\quad T(4;0)$

$(t)\;:y-0=\frac{1}{2}(x-4) \Rightarrow \boxed{(t)\;:y=\frac{1}{2}x-2}$

Exercice 3.

a) $P(6) = 3'000 \cdot e^{3{,}6-0{,}36} \cong \boxed{76'601,20 \text{ francs}}$

b) $P'(t) = 3'000 \cdot (0,6 - 0,02t) \cdot e^{0{,}6t-0{,}01t^2}$

zéros de P' : $t = \dfrac{0,6}{0,02} = 30$

t	0		30		$+\infty$
$P'(t)$		$+$	0	$-$	
$P(t)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

Le profit maximum sera atteint :

$\boxed{\text{le } 1^{\text{er}} \text{ janvier } 2024}$

c) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 3'000 \cdot \underbrace{e^{0{,}6t-0{,}01t^2}}_{\to 0} = \boxed{0}$

$P(6) = 7'000 \cdot e^{4{,}8-1{,}44} \cong \boxed{201'524,35 \text{ francs}}$

$P'(t) = 7'000 \cdot (0,8 - 0,08t) \cdot e^{0{,}8t-0{,}04t^2}$

zéros de P' : $t = \dfrac{0,8}{0,08} = 10$

t	0		10		$+\infty$
$P'(t)$		$+$	0	$-$	
$P(t)$		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

Le profit maximum sera atteint :

$\boxed{\text{le } 1^{\text{er}} \text{ janvier } 2004}$

$\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 7'000 \cdot \underbrace{e^{0{,}8t-0{,}04t^2}}_{\to 0} = \boxed{0}$

Exercice 4.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(4x-3)}{x-1} \overset{\text{" }\frac{0}{0}\text{ " B-H}}{\overbrace{=}} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{4}{4\,x-3}}{1} = \boxed{4}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \underbrace{(5x^2-3x+1)}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{e^{x}}_{\to 0} =$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2-3x+1}{e^{-x}} \overset{\text{" }\frac{+\infty}{+\infty}\text{ " B-H}}{\overbrace{=}}$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{10\,x-3}{-e^{(-x)}} \overset{\text{" }\frac{+\infty}{+\infty}\text{ " B-H}}{\overbrace{=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{10}{\underbrace{e^{(-x)}}_{\to+\infty}} = \boxed{0}$

$\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2x-2}{\ln(6x-5)} \overset{\text{" }\frac{0}{0}\text{ " B-H}}{\overbrace{=}} \lim_{x\to 1} \frac{2}{\frac{6}{6\,x-5}} = \boxed{\frac{1}{3}}$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\to+\infty} =$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x^2} \overset{\text{" }\frac{+\infty}{+\infty}\text{ " B-H}}{\overbrace{=}}$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{(-x)}}{2\,x} \overset{\text{" }\frac{+\infty}{+\infty}\text{ " B-H}}{\overbrace{=}} \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{e^{(-x)}}^{\to+\infty}}{2} = \boxed{+\infty}$