

Géométrie analytique I

Exercice 1.

$$\text{a) } (\gamma) \quad (x-3)^2 + (y+1)^2 = r^2$$

$$A \in \gamma \Rightarrow 9 + 4 = 13 = r^2$$

$$\Rightarrow (\gamma) : (x-3)^2 + (y+1)^2 = 13$$

$$\text{b) } A \in \gamma \text{ (donnée)}$$

$$\text{équ. déd. } (x-3)(x-3) + (y+1)(y+1) = 13$$

$$(t) : 3(x-3) + 2(y+1) = 13$$

$$\Rightarrow (t) : 3x + 2y - 20 = 0$$

$$(\gamma) \quad (x+1)^2 + (y-3)^2 = r^2$$

$$A \in \gamma \Rightarrow 16 + 1 = 17 = r^2$$

$$\Rightarrow (\gamma) : (x+1)^2 + (y-3)^2 = 17$$

$$A \in \gamma \text{ (donnée)}$$

$$\text{équ. déd. } (x+1)(x+1) + (y-3)(y-3) = 17$$

$$(t) : 4(x+1) + 1(y-3) = 17$$

$$\Rightarrow (t) : 4x + y - 16 = 0$$

Exercice 2.

$$\text{a) } x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = -3 + 9 + 4$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 + (y+2)^2 = 10$$

$$\Rightarrow C(-3; -2) \text{ et } r = \sqrt{10} \text{ u}$$

$$\text{b) } E \notin \gamma : 25 + 25 \neq 10$$

$$(t) : y = mx + h \Leftrightarrow mx - y + h = 0$$

$$E \in t \Rightarrow 3 = 2m + h$$

$$\Rightarrow h = 3 - 2m$$

$$\Rightarrow (t) : mx - y + 3 - 2m = 0$$

$$\delta(C; t) = r$$

$$\Rightarrow \frac{|-3m + 2 + 3 - 2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow |-5m + 5| = \sqrt{10}\sqrt{m^2 + 1}$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 14y + 49 = -13 + 4 + 49$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+7)^2 = 40$$

$$\Rightarrow C(2; -7) \text{ et } r = 2\sqrt{10} \text{ u}$$

$$E \notin \gamma : 64 + 16 \neq 40$$

$$(t) : y = mx + h \Leftrightarrow mx - y + h = 0$$

$$E \in t \Rightarrow -3 = -6m + h$$

$$\Rightarrow h = 6m - 3$$

$$\Rightarrow (t) : mx - y + 6m - 3 = 0$$

$$\delta(C; t) = r$$

$$\Rightarrow \frac{|2m + 7 + 6m - 3|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2\sqrt{10}$$

$$\Rightarrow |8m + 4| = 40\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Rightarrow (-5m + 5)^2 = 10(m^2 + 1)$$

$$\Rightarrow 25m^2 - 50m + 25 = 10m^2 + 10$$

$$\Rightarrow 15m^2 - 50m + 15 = 0$$

$$\Rightarrow 3m^2 - 10m + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (3m - 1)(m - 3) = 0$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{1}{3} \text{ et } m_2 = 3$$

$$\Rightarrow h_1 = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3} \text{ et } h_2 = 3 - 6 = -3$$

$$\Rightarrow (t_1) : y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow (t_2) : y = 3x - 3$$

$$c) t_1 \cap \gamma : x = 3y - 7$$

$$\Rightarrow (3y - 7 + 3)^2 + (y + 2)^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow (3y - 4)^2 + (y + 2)^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow 9y^2 - 24y + 16 + y^2 + 4y + 4 = 10$$

$$\Leftrightarrow 10y^2 - 20y + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow y = 1 \text{ et } x = -4 \Rightarrow T_1(-4; 1)$$

$$t_2 \cap \gamma : y = 3x - 3$$

$$\Rightarrow (x + 3)^2 + (3x - 3 + 2)^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow (x + 3)^2 + (3x - 1)^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + 9x^2 - 6x + 1 = 10$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ et } y = -3 \Rightarrow T_2(0; -3)$$

$$\Rightarrow (8m + 4)^2 = 40(m^2 + 1)$$

$$\Rightarrow 64^2 + 64m + 16 = 40m^2 + 40$$

$$\Rightarrow 24m^2 + 64m - 24 = 0$$

$$\Rightarrow 3m^2 + 8m - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (3m - 1)(m + 3) = 0$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{1}{3} \text{ et } m_2 = -3$$

$$\Rightarrow h_1 = 2 - 3 = -1 \text{ et } h_2 = -21$$

$$\Rightarrow (t_1) : y = \frac{1}{3}x - 1$$

$$\Rightarrow (t_2) : y = -3x - 21$$

$$t_1 \cap \gamma : x = 3y + 3$$

$$\Rightarrow (3y + 3 - 2)^2 + (y + 7)^2 = 40$$

$$\Leftrightarrow (3y + 1)^2 + (y + 7)^2 = 40$$

$$\Leftrightarrow 9y^2 + 6y + 1 + y^2 + 14y + 49 = 40$$

$$\Leftrightarrow 10y^2 + 20y + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y + 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow y = -1 \text{ et } x = 0 \Rightarrow T_1(0; -1)$$

$$t_2 \cap \gamma : y = -3x - 21$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + (-3x - 21 + 7)^2 = 40$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (-3x - 14)^2 = 40$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + 9x^2 + 84x + 196 = 40$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 + 80x + 160 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = -4 \text{ et } y = -9 \Rightarrow T_2(-4; -9)$$

Exercice 3.

bissectrices des droites a et b

$$\frac{3x - 4y - 7}{5} = \pm \frac{4x - 3y + 14}{5}$$

$$\oplus \quad (e_1) : x + y + 21 = 0$$

$$\ominus \quad 7x - 7y + 7 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (e_2) : x - y + 1 = 0$$

$$e_1 \cap d : y = -5 \Rightarrow x = -16$$

$$e_2 \cap d : y = -5 \Rightarrow x = -6$$

$$\Rightarrow \quad C_1(-16; -5) \text{ et } C_2(-6; -5)$$

$$\delta(C_1; a) = \frac{|-48 + 20 - 7|}{5} = 7 \text{ u}$$

$$\delta(C_2; a) = \frac{|-18 + 20 - 7|}{5} = 1 \text{ u}$$

$$\Rightarrow \quad (\gamma_1) : (x + 16)^2 + (y + 5)^2 = 49$$

$$\Rightarrow \quad (\gamma_2) : (x + 6)^2 + (y + 5)^2 = 1$$

bissectrices des droites a et b

$$\frac{4x - 3y + 7}{5} = \pm \frac{3x - 4y - 35}{5}$$

$$\oplus \quad (e_1) : x + y + 42 = 0$$

$$\ominus \quad 7x - 7y - 28 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (e_2) : x - y - 4 = 0$$

$$e_1 \cap d : y = 2 \Rightarrow x = -44$$

$$e_2 \cap d : y = 2 \Rightarrow x = 6$$

$$\Rightarrow \quad C_1(-44; 2) \text{ et } C_2(6; 2)$$

$$\delta(C_1; a) = \frac{|-176 - 6 + 7|}{5} = 35 \text{ u}$$

$$\delta(C_2; a) = \frac{|24 - 6 + 7|}{5} = 5 \text{ u}$$

$$\Rightarrow \quad (\gamma_1) : (x + 44)^2 + (y - 2)^2 = 1225$$

$$\Rightarrow \quad (\gamma_2) : (x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 25$$