

Chapitre 1

Algèbre linéaire

1.1 Calcul matriciel

1.1.1 Calculer, quand cela est possible, les produits AB et BA suivants :

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.1.2 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer : AB , AC , $AB+AC$, $B+C$, $A(B+C)$, $A+B$, $(A+B)^2$, A^2 , B^2 , $A^2+2AB+B^2$, C^2 , C^3 et C^n ($n \in \mathbb{N}^*$).

1.1.3 On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices B carrées d'ordre 2 telles que $AB = BA$.

1.1.4 Soit A une matrice de type 3×7 , B une matrice de type 7×3 et C une matrice de type 7×7 . De quel type sont les matrices suivantes ?

a) $(A \cdot B) \cdot C$

c) $C \cdot (B \cdot A)$

b) $B \cdot (A \cdot C)$

d) $(A \cdot C) \cdot B$

1.1.5 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $(AB)(AB) = AB$.

1.1.6 Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des nombres réels, $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\delta & \gamma \end{pmatrix}$. Montrer que $AB = BA$.

1.1.7 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice B telle que $AB \neq 0$ et $BA = 0$.

1.1.8 Vérifier que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

1.1.9 On considère les matrices

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout entier $n \geq 1$, calculer : N^n , U^n , R^n et T^n .

1.1.10 On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer : $A \cdot B$, ${}^tA \cdot B$, ${}^t(A \cdot B)$, ${}^tB \cdot {}^tA$ et ${}^tB + {}^tA$.

1.1.11 Résoudre les systèmes suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 8 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 10 \\ x + y - z = -2 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x + 2y - 5z + 4t = 1 \\ 2x - 3y + 2z + 3t = 18 \\ 4x - 7y + z - 6t = -5 \\ x + y - z + t = 1 \end{cases}$$

1.1.12 Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 0 \\ 5x - 3y + z = 0 \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ -2x + 5y + 2z = 1 \\ 8x + y + 4z = -1 \end{array} \right. & \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 4 \\ 3x - y + z = 3 \\ -3x + 5y + 4z = 5 \end{array} \right. \\ \\ \text{d)} \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 3 \\ 3x - y + 4z = 2 \\ 4x + y - z = 5 \\ x + y + z = 4 \end{array} \right. & \text{e)} \left\{ \begin{array}{l} x - 3y + z - t = 0 \\ 2x + y - z + 2t = 0 \end{array} \right. & \text{f)} \left\{ \begin{array}{l} x + 5y + 4z - 13t = 3 \\ 3x - y + 2z + 5t = 2 \\ 2x + 2y + 3z - 4t = 1 \end{array} \right. \end{array}$$

1.1.13 Calculer l'inverse de chacune des matrices ci-dessous :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{b)} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

1.1.14 Utiliser la méthode de Gauss-Jordan pour montrer que si $abc \neq 0$, alors

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.15 Résoudre les systèmes suivants à l'aide d'un calcul d'inverse de matrice :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y + 3z = 5 \\ x + z = -2 \\ x + y + z = 3 \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} 3x + 5y + 4z = 3 \\ 4x + 5y + 4z = 0 \\ -x - y - z = 2 \end{array} \right. & \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - y - 2z = 5 \\ 3x + 5y + z = 10 \end{array} \right. \end{array}$$

1.2 Espaces vectoriels

1.2.1 Dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, on considère l'addition, ainsi que la loi de composition externe :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(\alpha; u) \longmapsto 0$$

L'ensemble $\mathbb{Z}$, muni de ces deux lois, est-il un espace vectoriel ?

1.2.2 Dans l'ensemble $\mathbb{R}^2$, on considère les deux lois de composition définies par :

$$(x; y) + (x'; y') \longmapsto (x + x'; y + y')$$

$$\alpha(x; y) \longmapsto (\alpha x; y)$$

où α, x, x', y, y' sont des nombres réels. Montrer que $\mathbb{R}^2$, muni de ces deux lois, n'est pas un espace vectoriel.

1.2.3 On munit l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2

$$M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

des opérations usuelles :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$$

Prouver que, muni des deux opérations ci-dessus, $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel ; préciser l'élément neutre de l'opération $+$ et l'opposé d'une matrice donnée.

1.2.4 Si V est un espace vectoriel, $u, v \in V$, parmi les expressions suivantes, lesquelles ont un sens ?

a) $\frac{u}{3}$

c) $u - 4$

e) $u^2 - 2u + 1$

b) $\frac{u+v}{2} - u$

d) $\frac{u}{v} + \frac{v}{u}$

f) $2u - 3uv$

1.2.5 Soit T l'ensemble des applications de $[0; 2\pi]$ vers $\mathbb{R}$ définies par $f(x) = a \cos(x) + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble T , muni de l'addition de fonctions et de la multiplication d'une fonction par un nombre réel est un espace vectoriel.

1.2.6 Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$A = \{(x; y; z) \mid x = 12\}$

$B = \{(x; y; z) \mid z = 0\}$

$C = \{(x; y; z) \mid y = 3x\}$

$D = \{(x; y; z) \mid 2x + y + z = 21\}$

$E = \{(x; y; z) \mid 3x + 4y - 5z = 0\}$

$F = \{(x; y; z) \mid xy = z\}$

$G = \{(x; y; z) \mid x^2 + y^2 = z^2\}$

$H = \left\{ (x; y; z) \mid x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \right\}$

1.2.7 Soit $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que l'ensemble des fonctions paires de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$.

- b) Montrer que l'ensemble des fonctions impaires de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$.

1.2.8 a) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$?

b) $B = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f(0) = f(1)\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$?

c) $C = \{p \in \mathbb{R}[t] \mid \deg(p) = 2\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[t]$?

1.2.9 Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}_I$ des fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_I$.

1.2.10 Montrer que l'ensemble $A = \{(x; y; z; t) \mid x = 2y + z \text{ et } t = 5x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

1.2.11 Soit A_α le sous-ensemble de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ constitué des fonctions affines f telles que $f(\alpha) = 0$ (où α est un nombre réel). Montrer que A_α est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$.

1.2.12 Montrer que les familles suivantes de $\mathbb{R}^n$ sont libres :

- | | |
|---|--|
| a) $((1; -1; 1); (0; 2; -1))$ | b) $((0; 1); (1; 1))$ |
| c) $((2; 1; 0); (0; 1; -1))$ | d) $((-1; 3); (0; 2))$ |
| e) $((\pi; 0); (0; e))$ | f) $((2; 4); (2; 5))$ |
| g) $((1; 1; 0); (1; 1; 1); (0; -1; 1))$ | h) $((0; 1; 1); (0; 1; 3); (1; 3; 5))$ |

1.2.13

- a) Dans $\mathbb{R}^3$ on donne les vecteurs $(1; 2; -1)$, $(1; -1; 3)$ et $(m; -1; 2)$, où m est un nombre réel. Pour quelle(s) valeur(s) de m forment-ils une famille liée ?
- b) Même question avec les vecteurs $(m; 2; 1)$, $(2; m; 3)$ et $(1; 2; 1)$.

1.2.14 Soit u et v deux éléments de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$. Montrer que $(u; v)$ est une famille libre lorsque $(u(x); v(x))$ est égale à :

- | | | | |
|---------------------|-------------------------|-------------------|--------------------------|
| a) $(1; x)$ | b) $(x; x^2)$ | c) $(x; x^4)$ | d) $(e^x; x)$ |
| e) $(xe^x; e^{2x})$ | f) $(\sin(x); \cos(x))$ | g) $(x; \sin(x))$ | h) $(\sin(x); \sin(2x))$ |

1.2.15 Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , la famille $(f_1; f_2; \dots; f_n)$ d'éléments de $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ définis par $f_k(x) = \sin(kx)$ pour $k = 1, 2, \dots, n$ est libre.

1.2.16 Soit $A = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ et f, g, h trois éléments de $\mathcal{F}_A$ définis par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1} \qquad g(x) = \frac{3}{x-1} \qquad h(x) = \frac{1}{2x+2}$$

La famille $(f; g; h)$ est-elle libre ?

1.2.17 Dans chacun des cas suivants, montrer que $(e_1; e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer les composantes de u relativement à cette base :

a) $e_1 = (1; 1) \qquad e_2 = (1; 0) \qquad u = (0; 1)$

b) $e_1 = (1; 1) \qquad e_2 = (-1; 1) \qquad u = (1; 3)$

1.2.18 Dans chacun des cas suivants, montrer que $(e_1; e_2; e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les composantes de u relativement à cette base :

a) $e_1 = (1; 1; -1) \qquad e_2 = (1; -1; 0) \qquad e_3 = (1; 0; 1) \qquad u = (0; 1; 0)$

b) $e_1 = (1; -1; 0) \qquad e_2 = (0; 1; -1) \qquad e_3 = (1; 0; 2) \qquad u = (1; 1; 1)$

1.2.19 Soit P_2 l'ensemble des polynômes de la forme $ax^2 + bx + c$, où a, b, c sont des nombres réels. Montrer que la famille $(2-x; 1+2x; 1-x^2)$ est une base de P_2 . Calculer les composantes relativement à cette base des polynômes x^2 et $(2x-1)^2$.

1.2.20 Montrer que la famille

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right)$$

est une base de $M_2(\mathbb{R})$.

1.2.21 Déterminer la dimension et une base de l'ensemble des solutions de chacun des systèmes :

$$\text{a) } \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x - 6y + 2z = 0 \\ 3x - 9y + 3z = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 0 \\ 4x + 3y - z = 0 \\ 6x + 5y + z = 0 \end{cases}$$

1.2.22 Trouver une base du sous-espace E de $\mathbb{R}^4$ défini par :

$$E = \{(x; y; z; t) | x + y = z - t = 0\}$$

1.2.23 Dans $\mathbb{R}^4$, trouver une base comprenant :

- a) le vecteur $(2; 1; 3; 2)$,
- b) les vecteurs $(2; 1; 0; 3)$ et $(1; -2; 1; 0)$,
- c) les vecteurs $(2; 0; 1; 0)$, $(0; 0; 1; 3)$ et $(0; 1; 1; 0)$.

1.2.24 Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x; y; z; t) \mid y + z + t = 0\}, \quad G = \{(x; y; z; t) \mid x + y = 0 \text{ et } z = 2t\}$$

Déterminer la dimension et une base de F , G et $F \cap G$.

1.2.25 Soit $(e_1; e_2)$ une base de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $(e_2; e_1)$, $(e_1; e_1 + e_2)$, $(e_1 - e_2; e_1 + e_2)$ et $(e_1 + \alpha \cdot e_2; e_2)$ sont aussi des bases de $\mathbb{R}^2$. Quelles sont les composantes de e_1 et de e_2 relativement à chacune de ces bases.

1.2.26 Trouver une base du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par :

$$\{(3; 2; -2); (7; -3; 1); (-11; 8; -4); (4; -5; 3)\}$$

1.2.27 Soit $(e_1; e_2; e_3; e_4)$ une base d'un espace vectoriel E . Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel U de E engendré par les quatre vecteurs :

$$u_1 = -e_1 + e_2 + 2e_3 - e_4$$

$$u_2 = 2e_1 + 3e_2 - e_3 + e_4$$

$$u_3 = 3e_1 + 7e_2 + e_4$$

$$u_4 = e_1 + 9e_2 + 4e_3 - e_4$$

Extraire de la famille $(u_1; u_2; u_3; u_4)$ une base de U .

1.2.28 Soit P_3 l'ensemble des polynômes de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$, où a, b, c, d sont des nombres réels. Calculer la dimension du sous-espace

$$\langle 4x^2 - x + 2; 2x^2 + 6x + 3; -4x^2 + 10x + 2 \rangle$$

dans P_3 .

1.2.29 Soit $F = \langle (1; 3; -3; -1; -4); (1; 4; -1; -2; -2); (2; 9; 0; -5; -2) \rangle$ et $G = \langle (1; 6; 2; -2; 3); (2; 8; -1; -6; -5); (1; 3; -1; -5; -6) \rangle$ deux sous-espaces de $\mathbb{R}^5$. Calculer $\dim(F + G)$ et $\dim(F \cap G)$.

1.2.30 Soit u et v deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$. Montrer que si $(u; v)$ est une famille libre, alors $\mathbb{R}^2$ est somme directe des sous-espaces engendrés par u et v respectivement.

1.2.31 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère deux sous-espaces vectoriels A et B . Dans les trois cas ci-dessous, répondre aux questions suivantes.

- $\mathbb{R}^3$ est-il la somme de A et B ?
- $\mathbb{R}^3$ est-il la somme directe de A et B ? Si ce n'est pas le cas, déterminer $A \cap B$.
- a) $A = \{(x; y; y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a; a; a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.
- b) $A = \{(x; y; y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a; a; -a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.
- c) $A = \{(x; y; -y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(a; 2a; b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

1.2.32 Dans l'espace vectoriel réel $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ muni de l'addition et de la multiplication usuelle, on considère les deux sous-ensembles :

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

- a) Démontrer que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
 - b) Démontrer que $M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \mathcal{A} \oplus \mathcal{S}$
- 1.2.33**
- a) Prouver que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x+y & x \\ 4x & x-y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Trouver une base de F .
 - b) Déterminer une base du sous-espace vectoriel G engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.
 - c) Déterminer une base de $F \cap G$.

1.2.34 Dans $M_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\dim(\langle A; B; C; D \rangle)$ et trouver une base d'un supplémentaire de ce sous-espace.

1.2.35 Dans P_3 , on considère les polynômes

$$p_1 = t^3 - 2t^2 + 4t + 1, \quad p_2 = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1, \quad p_3 = t^3 + 6t - 5 \quad \text{et} \quad p_4 = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5$$

Calculer $\dim(\langle p_1; p_2; p_3; p_4 \rangle)$ et trouver une base d'un supplémentaire de ce sous-espace.

1.2.36 Montrer que les sous-espaces des fonctions paires et celui des fonctions impaires sont supplémentaires dans $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$.

1.2.37 Déterminer, en fonction de α et de β le rang de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & \alpha & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

1.3 Applications linéaires

1.3.1 Les applications h , de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^p$, définies de la façon suivantes, sont-elles linéaires ?

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------------|
| a) $h((x; y)) = x + y$ | b) $h((x; y)) = xy$ |
| c) $h((x; y)) = (2x - y; x)$ | d) $h((x; y)) = (x + 1; y)$ |
| e) $h((x; y)) = (x; y; x - y)$ | f) $h((x; y; z)) = (x + 2y; z - 2y)$ |
| g) $h((x; y; z)) = (0; x; 2x)$ | h) $h((x; y)) = (x^2; x + y)$ |
| i) $h((x; y)) = (\sin(x); y)$ | j) $h((x; y; z)) = (x - z; 2z - 2x)$ |

1.3.2 Pour les applications linéaires de l'exercice précédent, déterminer la matrice H de h relativement aux bases canoniques.

1.3.3 Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $h((-2; 1)) = (3; 5)$ et $h((1; 3)) = (-1; 2)$. Trouver la matrice H de h relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1.3.4 Soit $\mathbb{R}^2$ muni d'une base $(e_1; e_2)$ et $u = xe_1 + ye_2$. Les applications h définies de la façon suivantes sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$?

- | | |
|----------------|----------------------------|
| a) $h(u) = 3u$ | b) $h(u) = u + (x - y)e_2$ |
|----------------|----------------------------|

Soit $\mathbb{R}^3$ muni d'une base $(e_1; e_2; e_3)$ et $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Les applications h définies de la façon suivantes sont-elles des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$?

- | | |
|-------------------------------|-------------------------|
| c) $h(u) = xe_1 + ye_2 + e_3$ | d) $h(u) = ye_1 - xe_2$ |
|-------------------------------|-------------------------|

1.3.5 Les applications h définies de la façon suivantes sont-elles des endomorphismes de P_2 ?

- | | |
|------------------------------|---------------------------------------|
| a) $h(ax^2 + bx + c) = ax^2$ | b) $h(ax^2 + bx + c) = cx^2 + bx + a$ |
|------------------------------|---------------------------------------|

1.3.6 Un endomorphisme g de $\mathbb{R}^2$ envoie $(2; -1)$ sur $(1; 1)$ et $(0; 2)$ sur $(3; 1)$.

Former la matrice G de g relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et déterminer l'image de $u = (-4; 1)$ par g , ainsi que son image réciproque par g .

1.3.7 Les applications h , de $\mathcal{D}_{[a;b]}$ vers $\mathcal{F}_{[a;b]}$, définies de la façon suivantes, sont-elles linéaires ?

a) $h(f) = f'$

b) $h(f) = f' - f^2$

c) $h(f) = g$ où g est définie par $g(x) = f(a)$

d) $h(f) = g$ où g est définie par $g(x) = f(b) + 1$

e) $h(f) = g$ où g est définie par $g(x) = \int_a^x f(t)dt$

f) $h(f) = g$ où g est définie par $g(x) = \int_a^x f(t)dt + 3$

g) $h(f) = g$ où g est définie par $g(x) = e^{f(x)}$

h) $h(f) = g$ où g est définie par $g(x) = f(x)e^x$

1.3.8 Soit l'application linéaire définie par $h((x; y; z)) = (x - y; x + 5y)$.

a) Déterminer la matrice H de h relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer la matrice H^* de h relativement aux bases $\mathcal{B}_1^* = ((0; 1; 1), (1; 0; 1), (1; 0; 0))$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}_2^* = ((-3; -4), (4; 5))$ de $\mathbb{R}^2$.

c) Calculer les composantes relativement à la base $\mathcal{B}_1^*$ de $u = (-1; 5; 6)$ et les composantes de son image par h dans la base $\mathcal{B}_2^*$.

1.3.9 Déterminer le noyau et l'image d'un homomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$ dont la matrice H relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ est $H = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -\frac{5}{2} & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$.

1.3.10 Donner la matrice, le noyau et l'image relativement aux bases canoniques des applications linéaires de l'exercice 1.3.1.

1.3.11 Déterminer la matrice, le noyau et l'image relativement à la base donnée, de chacun des endomorphismes des exercices 1.3.4.

1.3.12 P_2 est muni de la base $(1; x; x^2)$. Déterminer la matrice, le noyau et l'image

relativement à la base donnée, de chacun des endomorphismes de l'exercice 1.3.5.

1.3.13 Reprendre l'exercice 1.3.7 et déterminer :

- en a) le noyau et l'image de h ,
- en e) le noyau et l'image de h ,
- en h) le noyau de h .

1.3.14 Munissons $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ de leur base canonique et donnons les matrices des applications linéaires f, g, h et i :

$$f : \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \quad g : \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h : \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad i : \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice, le noyau et l'image des applications linéaires suivantes :

$$m = f \circ h, \quad p = g \circ i, \quad q = (f + g) \circ h$$

1.3.15 Soit E un espace vectoriel muni d'une base $(e_1; e_2; e_3)$ et h l'application linéaire de E vers E définie par,

$$h(e_1) = e_1 + e_2 \quad h(e_2) = 2e_1 - e_2 \quad h(e_3) = e_1 - 2e_2$$

Déterminer la matrice, le noyau et l'image de h . h est-elle injective, surjective ou bijective ?

1.3.16 Soit E un espace vectoriel muni d'une base $(e_1; e_2)$ et h l'endomorphisme de E défini par $h(2e_1 + e_2) = 2e_1 - 3e_2$ et $h(e_1 - e_2) = 3e_1 - e_2$. Déterminer la matrice, le noyau et l'image de h . h est-il injectif, surjectif ou bijectif ?

1.3.17 Soit $a = (1; 2)$ et $b = (3; -1)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$, $u = (1; 0; 1)$ et $v = (0; 1; -2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice, le noyau et l'image de l'application linéaire h de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$ telle que $h(a) = u$ et $h(b) = v$. h est-elle injective, surjective ou bijective ?

1.3.18 Prouver que $f((x; y)) = (2x + y; x + 2y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.

1.3.19 Soit P_3 l'ensemble des polynômes de la forme $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, avec a_0, a_1, a_2, a_3 des nombres réels.

- a) Soit $\varphi_a : P_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie (pour $a \in \mathbb{R}$) par $\varphi_a(P) = P(a)$. Déterminer la matrice de φ_a relativement aux bases $(1; x; x^2; x^3)$ de P_3 et (1) de $\mathbb{R}$.
- b) Déterminer le noyau et l'image de φ_a .

1.3.20 Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par sa matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -1 & 0 & -1 \\ b & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

où a et b sont des nombres réels. Déterminer a et b pour que le rang de h soit 2 ; donner alors $\ker(h)$.

1.3.21 Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$h(x; y; z) = (x + 2y - z; y + z; x + y - 2z)$$

- a) Trouver une base de l'image de h .
- b) Trouver une base du noyau de h .

1.3.22 On considère l'application linéaire :

$$f(x_1; x_2; x_3; x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4; x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4)$$

- a) Quelle est la matrice F de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^4$?
- b) Déterminer le noyau de f . L'application linéaire f est-elle injective ?
- c) Déterminer l'image de f . L'application f est-elle surjective ?
- d) Soit y_1, y_2 deux réels, déterminer un vecteur u de $\mathbb{R}^4$ tel que $f(u) = (y_1; y_2)$.

1.3.23 On considère l'application linéaire f dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$

- a) Déterminer une base du noyau de f .
- b) Déterminer une base de l'image de f . Quel est le rang de A ?

1.3.24 Soit P_2 l'ensemble des polynômes de la forme $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, avec a_0, a_1, a_2, a_3 des nombres réels. Soit $B = (1, x, x^2)$ la base canonique de P_2 . Considérons l'application d de P_2 dans P_2 définie par $d(P) = (x + 1)P'$, où P' est la dérivée de P par rapport à x .

- a) Montrer que d est un endomorphisme.
- b) Déterminer la matrice D de d par rapport à B .
- c) Déterminer le rang de d .
- d) Trouver une base de l'image de d .
- e) Trouver une base de noyau de d .

1.4 Déterminants et matrices inverses

1.4.1 Calculer les déterminants suivants :

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} a-x & c \\ b & d-x \end{vmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 4-\lambda & 5 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 2m & -(m+2) \\ 2(m-1) & -m \end{vmatrix}$$

1.4.2 Calculer les déterminants suivants :

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{e) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{f) } \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & 9 & -7 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

1.4.3 Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

1.4.4 Calculer et factoriser en utilisant les propriétés du déterminant :

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & b+c & a \\ 1 & c+a & b \\ 1 & a+b & c \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} x & 1 & a \\ 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{vmatrix} 3-t & -1 & 1 \\ 5 & -3-t & 1 \\ 6 & -6 & 4-t \end{vmatrix} \quad \text{e) } \begin{vmatrix} \ln(x) & \ln(y) & \ln(z) \\ \ln(2x) & \ln(2y) & \ln(2z) \\ \ln(3x) & \ln(3y) & \ln(3z) \end{vmatrix} \quad \text{f) } \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$$

1.4.5 Calculer les déterminants suivants (donner la réponse sous forme de produit).

$$\text{a) } \begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & x \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & 2a - a^2 & 2b - b^2 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & a+b & c \\ a & b & a \end{vmatrix}$$

1.4.6 On considère l'ensemble des points d'un plan dans lequel on a choisi une origine O et une base $(i; j)$.

a) Montrer que les points $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$ et $A_3(x_3; y_3)$ sont alignés si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

b) On donne trois droites deux à deux sécantes :

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

Prouver qu'elles sont concourantes si et seulement si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

1.4.7 Soit M une matrice carrée d'ordre n telle que ${}^tMM = I_n$. Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1} .

1.4.8 Calculer, lorsque c'est possible, l'inverse des matrices suivantes :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{c) } \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{d) } \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin^2(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) \end{pmatrix} \\ \text{e) } \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix} & \text{f) } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} & \text{g) } \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix} \\ \text{h) } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & \text{i) } \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} & \text{j) } \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1.4.9 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $(e_1; e_2)$, on considère les vecteurs $u = (2; 1)$, $v = (-1; 1)$ et l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relativement à la base $(e_1; e_2)$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Donner la matrice de h relativement aux bases suivantes :

$$\text{a) } (e_1 + e_2; 3e_2) \quad \text{b) } (u; v)$$

1.4.10 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $(e_1; e_2; e_3)$, on considère les vecteurs

$$u = (1; 1; 1), \quad v = (1; 1; 0)$$

et l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base $(e_1; e_2; e_3)$ est

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Donner la matrice de h relativement aux bases suivantes :

- a) $(e_3; e_2; e_1)$ b) $(u; v; e_1)$

1.4.11 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $\mathcal{B}^* = ((0; 1; 1); (1; 0; 1); (1; 1; 0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice F^* de f relativement à $\mathcal{B}^*$.

1.4.12 Soit P_3 l'ensemble des polynômes de la forme :

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

où a_0, a_1, a_2, a_3 sont des nombres réels. On considère la base $B = (1; x; x^2; x^3)$ de P_3 , ainsi que l'application $f : P_3 \rightarrow P_3$ qui à toute fonction fait correspondre sa dérivée.

- Vérifier que f est un endomorphisme de P_3 .
- Écrire la matrice A de f relativement à B .
- Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$.
- Montrer que $B' = (1 + x; x(x - 2); x(x - 1); x(x - 1)(x - 2))$ est une base de P_3 .
- Écrire la matrice de passage de B à B' , ainsi que la matrice de f relativement à la base B' .

1.4.13 On considère l'endomorphisme $h_k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est

$$H_k = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & k-3 \\ 5 & k-1 & 3 \\ 7 & k+3 & 1 \end{pmatrix}$$

où k est un paramètre réel.

- Pour quelles valeurs du paramètre k l'endomorphisme h_k est-il un automorphisme ?
- On suppose que $k = 3$:

- b_1) Soit $e_1^* = (1; -1; -1)$; prouver que (e_1^*) est une base de $\text{Ker}(h_3)$.
 b_2) Soit $e_2^* = (1; -8; 0)$ et $e_3^* = (0; 3; 1)$; prouver que $(e_2^*; e_3^*)$ est une base de $\text{Im}(h_3)$.
 b_3) Prouver que $\mathcal{B}^* = (e_1^*; e_2^*; e_3^*)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice H_3^* de h_3 relativement à la base $\mathcal{B}^*$.

1.5 Diagonalisation des endomorphismes

1.5.1 Le scalaire $\lambda = 2$ est-il une valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$?

1.5.2 Le scalaire $\lambda = -2$ est-il une valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$?

1.5.3 Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur propre de la matrice $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$? Si oui, déterminer la valeur propre associée.

1.5.4 Le vecteur $\begin{pmatrix} -1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$? Si oui, déterminer la valeur propre associée.

1.5.5 Le vecteur $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$? Si oui, déterminer la valeur propre associée.

1.5.6 Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est-il un vecteur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$? Si oui, déterminer la valeur propre associée.

1.5.7 Le scalaire $\lambda = 4$ est-il une valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$? Si oui, déterminer un vecteur propre associé.

1.5.8 Le scalaire $\lambda = 3$ est-il une valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$? Si oui,

déterminer un vecteur propre associé.

1.5.9 Déterminer, pour chacune des valeurs propres indiquées, une base du sous-espace propre associé.

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

b) $A = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\lambda = 4$.

c) $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$, $\lambda = 10$.

d) $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -13 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = -2$.

f) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$,
 $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

g) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, $\lambda = 3$.

h) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\lambda = 4$.

1.5.10 On donne les endomorphismes suivants de $\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{R}^3$) par leur matrice relativement à une base de $\mathbb{R}^2$ (respectivement $\mathbb{R}^3$) :

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 3 & 42 & -64 \\ 0 & 3 & 84 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Chercher, pour chacun d'eux, les valeurs propres et les sous-espaces propres associés. Lorsque c'est possible, déterminer la matrice de changement de base permettant de diagonaliser l'endomorphisme ; donner également la matrice de l'endomorphisme dans la nouvelle base.

1.5.11 Montrer que l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^2$ défini par $h((x; y)) = (-y; x)$ n'admet aucun vecteur propre.

1.5.12 Montrer qu'une matrice symétrique d'ordre 2 est diagonalisable.

1.5.13 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique, on considère un endomorphisme h qui admet les valeurs propres 2 et -3 , et les espaces propres $E_2 = \Delta((2; -1))$ et $E_{-3} = \Delta((3; 1))$. Déterminer la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1.5.14 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère un endomorphisme h qui admet les valeurs propres 1 et 4, et les espaces propres $E_1 = \Delta((1; -1; 1))$ et $E_4 = \Pi((1; 0; 1); (0; 1; 1))$. Déterminer la matrice de h dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1.5.15 Déterminer la nature géométrique des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ des matrices :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} & \text{c)} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{d)} \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix} & \text{e)} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{f)} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

1.5.16 Déterminer la nature géométrique des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ possédant les caractéristiques suivantes :

$$\text{a)} \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, E_1 = \Delta((1; -1)), E_2 = \Delta((3; -2)), M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b)} \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, E_3 = \Delta((2; 1)), E_{-3} = \Delta((1; 2)), M' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{c)} \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 7, E_0 = \Delta((2; 3)), E_7 = \Delta((1; -2)), M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{d)} \lambda_1 = 3, E_3 = \Pi((1; 0); (0; 1)), M' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{e)} \lambda_1 = -10, \lambda_2 = 10, E_{-10} = \Delta((2; 4; -5)), E_{10} = \Pi((2; 1; 0); (1; 0; 1)),$$

$$M' = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{f)} \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5, E_0 = \Pi((1; 0; 1); (0; 1; 0)), E_5 = \Delta((2; 1; 1)),$$

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

g) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, E_1 = \Pi((0; 1; 1); (1; 2; -1)), E_2 = \Delta((1; 2; 0)),$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

h) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, E_0 = \Delta((1; 1; 1)), E_4 = \Pi((-1; 1; 0); (-1; 0; 1)),$

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

1.5.17 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique, on considère l'endomorphisme h_m de matrice

$$\begin{pmatrix} m-1 & 1 \\ m-2 & \frac{4-3m}{2} \end{pmatrix}$$

où m est un nombre réel.

- Étudier, selon les valeurs de m , $\text{Im}(h_m)$ et $\ker(h_m)$.
- Pour quelles valeurs de m , h_m est-il une projection vectorielle ?
- Pour quelles valeurs de m , h_m est-il une symétrie vectorielle ?

1.5.18 Dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique, on considère l'endomorphisme h_α de matrice

$$\begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & \sin^2(\alpha) \\ \sin^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}$$

où α est un nombre réel.

- Déterminer α pour que h_α ne soit pas bijectif.
- Déterminer α pour que h_α soit une projection vectorielle.
- Déterminer α pour que h_α soit une symétrie vectorielle.

1.5.19 Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère l'endomorphisme h de matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 1 & 0 & -1 \\ -b & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

où a et b sont des nombres réels.

- Déterminer a et b pour que h soit une symétrie vectorielle.

- b) Déterminer a et b pour que $\text{Im}(h)$ soit de dimension 2 ; donner alors $\ker(h)$.

1.5.20 Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ est défini par sa matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

relativement à la base canonique.

- a) Vérifier que $(1; -1)$ et $(1; -2)$ sont deux vecteurs propres de f , puis en déduire les valeurs propres associées.
- b) Écrire la matrice de passage P de la base canonique à la base des vecteurs propres. Calculer P^{-1} .
- c) On note A' la matrice de f relativement à la base des vecteurs propres. Écrire A' , puis exprimer la matrice A en fonction des matrices P , P^{-1} et A' .
- d) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $A^n = P(A')^n P^{-1}$, puis calculer A^n .

- 1.5.21**
- a) Démontrer que si λ est une valeur propre d'un endomorphisme h d'un espace vectoriel E , λ^n est une valeur propre de l'endomorphisme $h^n = h \circ h \circ \dots \circ h$.
 - b) Supposons qu'il existe un $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $h^k = \text{id}_E$. Que peut-on dire des valeurs propres de h ?

1.6 Solutions des exercices

1.1.1

a) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 14 & 12 \\ 4 & 8 & 14 \end{pmatrix}$, BA n'existe pas

b) $AB = (32)$, $BA = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$

c) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.1.2 $AB = \begin{pmatrix} -1 & 17 & 9 \\ 3 & 11 & 7 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, $AC = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $AB + AC = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 \\ 5 & 14 & 11 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$,

$B + C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $A(B + C) = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 \\ 5 & 14 & 11 \\ -5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$,

$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 50 & 45 \\ 4 & 29 & 25 \\ -2 & 15 & 14 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 11 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 17 & 12 \\ -2 & 9 & 4 \\ -3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$,

$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 58 & 41 \\ 7 & 37 & 27 \\ -12 & 18 & 13 \end{pmatrix}$, $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$C^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.1.3 $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

1.1.4

a) Aucun type, le calcul n'est pas possible;

c) 7×7 ;

b) 7×7 ;

d) 3×3 .

1.1.5

–

1.1.6

–

1.1.7 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $c \in \mathbb{R}$.

1.1.8 –

$$\mathbf{1.1.9} \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ si } n > 2;$$

$$U^n = \begin{pmatrix} 1 & na & nb + ac \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & nc \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$R^{3k-2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, R^{3k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R^{3k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{1.1.10} \quad AB = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, {}^tAB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}, {}^t(AB) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$${}^tA {}^tB = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

${}^tA + {}^tB$ est impossible à calculer, car les dimensions de A et de B sont différentes.

1.1.11 a) $\{(1; 2; 3)\}$; b) $\{(-1; 4; 5)\}$, c) $\{(1; -1; 2; 3)\}$.

1.1.12 a) $\{\alpha(7; 16; 13)\}$; b) $\left\{\left(-\frac{1}{7}; \frac{1}{7}; 0\right) + \alpha\left(-\frac{3}{7}; -\frac{4}{7}; 1\right)\right\}$, c) $\emptyset$, d) $\emptyset$,
e) $\{\alpha(1; 0; -4; -3) + \beta(0; 1; 5; 2)\}$, f) $\emptyset$.

$$\mathbf{1.1.13} \quad \text{a) } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \text{ b) } \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \text{ c) } \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

1.1.14 –

1.1.15 a) $\{(-1; 5; -1)\}$; b) $\{(-3; 8; -7)\}$, c) $\{(2; 1; -1)\}$.

1.2.1 Non, car $1 \cdot u \neq u$.

1.2.2 On a $(\alpha + \beta) \cdot u \neq \alpha \cdot u + \beta \cdot u$.

$$\mathbf{1.2.3} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; -\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

1.2.4 a) oui, b) oui, c) non, d) non, e) non, f) non

1.2.5 -

1.2.6 Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont B , C , E et H .

1.2.7 -**1.2.8** a) oui, b) oui, c) non**1.2.9** -**1.2.10** -**1.2.11** -**1.2.12** -**1.2.13** a) $m = \frac{2}{5}$; b) $m = 1$ ou $m = 6$.**1.2.14** -**1.2.15** -**1.2.16** Non, car $2f - g - 2h = 0$.**1.2.17** a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.**1.2.18** a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.**1.2.19** $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \\ -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \frac{14}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ -4 \end{pmatrix}$.**1.2.20** -**1.2.21** a) $\dim(S) = 2$, base : $((3; 1; 0); (-1; 0; 1))$; b) $\dim(S) = 1$, base : $((4; -5; 1))$.**1.2.22** $((1; -1; 0; 0); (0; 0; 1; 1))$.**1.2.23** a) $((2; 1; 3; 2); (1; 0; 0; 0); (0; 1; 0; 0); (0; 0; 1; 0))$;b) $((2; 1; 0; 3); (1; -2; 1; 0); (0; 1; 0; 0); (0; 0; 1; 0))$;c) $((2; 0; 1; 0); (0; 0; 1; 3); (0; 1; 1; 0); (0; 0; 0; 1))$.**1.2.24** $\dim(F) = 3$, base : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$; $\dim(G) = 2$, base : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$; $\dim(F \cap G) = 1$, base : $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

1.2.25 $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1.2.26 Par exemple $((3; 2; -2); (7; -3; 1))$.

1.2.27 Par exemple $(u_1; u_2)$.

1.2.28 $\dim(\langle 4x^2 - x + 2; 2x^2 + 6x + 3; -4x^2 + 10x + 2 \rangle) = 3$.

1.2.29 $\dim(F + G) = 3$ et $\dim(F \cap G) = 2$.

1.2.30 -

1.2.31 a) $A + B \neq \mathbb{R}^3$, donc non somme directe; $A \cap B = B$

b) $A \oplus B = \mathbb{R}^3$

c) $A + B = \mathbb{R}^3$, somme non directe; $A \cap B = \{(a; 2a; -2a) \mid a \in \mathbb{R}\}$

1.2.32 -

1.2.33 a) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

b) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

c) $F \cap G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

1.2.34 $\dim(\langle A; B; C; D \rangle) = 2$, base du supplémentaire : $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

1.2.35 $\dim(\langle p_1; p_2; p_3; p_4 \rangle) = 2$, base du supplémentaire : $(t; 1)$.

1.2.36 -

1.2.37 Si $\alpha = \frac{-7}{5}$ et $\beta = \frac{-2}{5}$, alors le rang de A est égal à 2.
Sinon, le rang de A est égal à 3.

1.3.1 a) oui; b) non; c) oui; d) non; e) oui; f) oui; g) oui; h) non; i) non; j) oui.

1.3.2 a) $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$

f) $H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

g) $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

j) $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$1.3.3 \quad H = \begin{pmatrix} -\frac{10}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{13}{7} & \frac{9}{7} \end{pmatrix}$$

1.3.4 a) oui ; b) oui ; c) non ; d) oui.

1.3.5 a) oui ; b) oui.

$$1.3.6 \quad G = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, g((-4; 1)) = \left(-\frac{7}{2}; -\frac{5}{2}\right) \text{ et } {}^r g((-4; 1)) = \left(7; -\frac{17}{2}\right)$$

1.3.7 a) oui ; b) non ; c) oui ; d) non ; e) oui ; f) non ; g) non ; h) oui.

$$1.3.8 \quad \begin{array}{ll} \text{a) } H = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} & \text{c) } u = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1^*}; h(u) = \begin{pmatrix} -126 \\ -96 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2^*} \\ \text{b) } H^* = \begin{pmatrix} -25 & 1 & 1 \\ -19 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \end{array}$$

$$1.3.9 \quad \text{Ker}(h) = \{(2k; k) \mid k \in \mathbb{R}\} \text{ et } \text{Im}(h) = \{(-4t; 5t; -6t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

1.3.10

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{ker}(h) = \Delta((1; -1)) \\ \text{Im}(h) = \mathbb{R} \end{array}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{ker}(h) = \{(0; 0)\} \\ \text{Im}(h) = \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{ker}(h) = \{(0; 0)\} \\ \text{Im}(h) = \Pi((1; 0; 1), (0; 1; -1)) \end{array}$$

$$\text{f) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{ker}(h) = \Delta((-2; 1; 2)) \\ \text{Im}(h) = \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$$\text{g) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{ker}(h) = \Pi((0; 1; 0), (0; 0; 1)) \\ \text{Im}(h) = \Delta((0; 1; 2)) \end{array}$$

$$\text{j) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{ker}(h) = \Pi((1; 0; 1), (0; 1; 0)) \\ \text{Im}(h) = \Delta((1; -2)) \end{array}$$

1.3.11

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{ker}(h) = \{(0; 0)\} \\ \text{Im}(h) = \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{ker}(h) = \Delta((0; 1)) \\ \text{Im}(h) = \Delta((1; 1)) \end{array}$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \text{ker}(h) = \Delta((0; 0; 1)) \\ \text{Im}(h) = \Pi((1; 0; 0), (0; 1; 0)) \end{array}$$

1.3.12

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \ker(h) = \{bx + c | b, c \in \mathbb{R}\} = \Pi((1; 0; 0), (0; 1; 0)) \\ \text{Im}(h) = \{ax^2 | a \in \mathbb{R}\} = \Delta((0; 0; 1)) \end{array}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \ker(h) = \{0\} \\ \text{Im}(h) = P_2 \end{array}$$

1.3.13

a) $\ker(h)$ est l'ensemble des fonctions constantes et $\text{Im}(h)$ est l'ensemble des fonctions qui admettent une primitive; e) $\ker(h) = \{x \mapsto 0\}$ et $\text{Im}(h) = \{g \in \mathcal{D}_{[a;b]}^2 | g(a) = 0\}$; h) $\ker(h) = \{x \mapsto 0\}$.

1.3.14

$$M_m = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \ker(m) = \Delta((1; 1)) \\ \text{Im}(m) = \Delta((5; -8)) \end{array}$$

$$M_p = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -15 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \ker(p) = \Delta((3; 1)) \\ \text{Im}(p) = \Delta((1; -5)) \end{array}$$

$$M_q = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \ker(q) = \{(0; 0)\} \\ \text{Im}(q) = \mathbb{R}^2 \end{array}$$

1.3.15

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \ker(h) = \Delta((1; -1; 1)) \\ \text{Im}(h) = \Pi((1; 0; 0), (0; 1; 0)) \\ h \text{ n'est ni injective, ni surjective, ni bijective.} \end{array}$$

1.3.16

$$H = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \ker(h) = \{(0; 0)\} \\ \text{Im}(h) = E \\ h \text{ est bijective.} \end{array}$$

1.3.17

$$H = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} \ker(h) = \{(0; 0)\} \\ \text{Im}(h) = \Pi((1; 0; 1), (0; 1; -2)) \\ h \text{ est injective, mais n'est ni surjective, ni bijective.} \end{array}$$

1.3.18 -

1.3.19 a) $F_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \end{pmatrix}$; b) $\ker(\varphi_a) = \{(x - a)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ et $\text{Im}(\varphi_a) = \mathbb{R}$.

1.3.20 $a = 1$ et b quelconque. $\ker(h) = \Delta((1; b; -1))$.

1.3.21 a) $((1; 0; 1), (0; 1; -1))$

b) $((3; -1; 1))$

$$\text{1.3.22} \quad \text{a) } F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b) $\ker(f) = \langle ((1; -2; 1; 0), (2; -3; 0; 1)) \rangle$

Le noyau de f n'est pas réduit au vecteur nul de $\mathbb{R}^4$. Donc f n'est pas injective.

c) $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. f est surjective.

d) $f(y_2 - y_1; 2y_1 - y_2; 0; 0) = (y_1; y_2)$

1.3.23 a) $\ker(f) = \langle ((-3; 1; 1; 0)) \rangle$

b) $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. Le rang de la matrice A est égal à 3.

1.3.24 a) -

b) $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) Le rang de d est égal à 2.

d) $\text{Im}(d)$ est engendré par $d(x) = 1 + x$ et $d(x^2) = 2x + 2x^2$, cette famille constitue une base de $\text{Im}(d)$.

e) Le noyau est engendré par le polynôme 1.

1.4.1 a) 8; b) 11; c) $x^2 - (a + d)x + (ad - bc)$; d) $\lambda^2 - 7\lambda + 2$; e) $2m - 4$.

1.4.2 a) 79; b) 24; c) -5; d) 8; e) 12; f) 178.

1.4.3 27 et 86.

1.4.4 a) 0; b) $(x - 1)(x - a)$; c) $(b - a)(c - a)(c - b)$; d) $-(t + 2)(t - 2)(t - 4)$; e) 0; f) $(x - y)(y - z)(z - x)(xy + yz + xz)$.

1.4.5 a) $(x + a + b)(x - a)(x - b)$

b) 0

c) a^3

1.4.6 -

1.4.7 $M^{-1} = {}^t M$

1.4.8

a) $\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{14} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ c) non inversible

d) non inversible si $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, avec $k \in \mathbb{Z}$, sinon $\frac{1}{\cos(2\alpha)} \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) & -\sin^2(\alpha) \\ -\sin^2(\alpha) & \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}$

e) non inversible f) $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$ h) $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

i) non inversible si $m = -2$ ou $m = 1$, sinon $\frac{1}{(m-1)(m+2)} \begin{pmatrix} m+1 & -1 & -1 \\ -1 & m+1 & -1 \\ -1 & -1 & m+1 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1.4.9 a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}$.

1.4.10 a) $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & -4 & 2 \\ 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4.11 $F^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1.4.12 a) -; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\ker(f) = P_0$ et $\text{Im}(f) = P_2$; d) -; e) matrice de

passage : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et matrice dans la nouvelle base : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.4.13 a) $k \in \mathbb{R} - \{2; 3\}$

b) $H_3^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 6 \\ 0 & -41 & 19 \end{pmatrix}$

1.5.1 Oui

1.5.2 Oui

1.5.3 Non

1.5.4 Oui, $\lambda = 3 + \sqrt{2}$

1.5.5 Oui, $\lambda = 0$

1.5.6 Oui, $\lambda = -2$

1.5.7 Oui, $(1; 1; -1)$

1.5.8 Oui, $(3; 2; 1)$

1.5.9 a) $B_1 = ((0; 1))$, $B_5 = ((2; 1))$

b) $B_4 = ((3; 2))$

c) $B_{10} = ((-1; 3))$; une autre valeur propre : $\lambda = 3$, $B_3 = ((2; 1))$

d) $B_1 = ((-2; 3))$, $B_5 = ((-2; 1))$

e) $B_{-2} = ((1; 1; 3))$

f) $B_1 = ((0; 1; 0))$, $B_2 = ((-1; 2; 2))$, $B_3 = ((-1; 1; 1))$

g) $B_3 = ((-3; 0; 1), (-2; 1; 0))$; une autre valeur propre : $\lambda = 8$, $B_8 = ((1; -1; 2))$

- h) $B_4 = ((0; 0; 0; 1), (2; 3; 1; 0))$; deux autres valeurs propres : $\lambda = 2$, $B_2 = ((-2; 1; 1; 0))$
et $\lambda = 1$, $B_1 = ((-1; 0; 1; 0))$

1.5.10

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, E_1 = \Delta((1; -1)), E_4 = \Delta((2; 1))$$

a)
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, E_2 = \Delta((1; 1)), E_3 = \Delta((1; 0))$$

b)
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 3, E_3 = \Delta((1; -1))$$

- c) A n'est pas diagonalisable

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, E_2 = \Delta((3'592; -84; 1)), E_3 = \Delta((1; 0; 0))$$

- d) A n'est pas diagonalisable

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6, E_2 = \Pi((1; 0; -1); (2; -1; 0)), E_6 = \Delta((1; 1; 1))$$

e)
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2, E_{-2} = \Delta((0; 0; 1)), E_0 = \Delta((1; 1; 0)), E_2 = \Delta((1; -1; 0))$$

f)
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1.5.11 -**1.5.12 -**

1.5.13
$$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.5.14
$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1.5.15** a) projection de direction $\Delta((2; 1))$ sur la droite $\Delta((1; 0))$; b) symétrie de direction $\Delta((0; 1))$ par rapport à la droite $\Delta((1; \sqrt{3}))$; c) affinité de direction $\Delta((2; -1))$ et de rapport 2, suivi d'une affinité de direction $\Delta((1; 1))$ et de rapport 5; d) symétrie de direction $\Delta((2; 4; -5))$ par rapport au plan $x - 2y - z = 0$; e) projection de direction $\Delta((-1; 1; 0))$ sur le plan $x + 2y - z = 0$; f) rotation d'axe $\Delta((0; 1; 0))$ et d'amplitude $\alpha = 36.87^\circ$

1.5.16 a) affinité d'axe E_1 de direction E_2 et de rapport 2 ; b) symétrie par rapport à la droite E_3 de direction E_{-3} , suivi d'une homothétie de rapport 3 ; c) projection sur E_7 de direction E_0 , suivi d'une homothétie centrée à l'origine et de rapport 7 ; d) homothétie centrée à l'origine et de rapport 3 ; e) symétrie par rapport au plan E_{10} de direction E_{-10} , suivi d'une homothétie centrée à l'origine et de rapport 10 ; f) projection parallèle au plan E_0 sur la droite E_5 , suivi d'une homothétie centrée à l'origine et de rapport 5 ; g) affinité de plan E_1 de direction E_2 et de rapport 2 ; h) projection sur E_4 de direction E_0 , suivi d'une homothétie centrée à l'origine et de rapport 4.

1.5.17

a) si $m = 0$: $\text{Im}(h_0) = \Delta((1; 2))$, $\ker(h_0) = \Delta((1; 1))$, si $m = \frac{5}{3}$: $\text{Im}(h_{\frac{5}{3}}) = \Delta((2; -1))$, $\ker(h_{\frac{5}{3}}) = \Delta((3; -2))$, sinon : $\text{Im}(h_m) = \mathbb{R}^2$, $\ker(h_m) = \{0\}$; b) si $m = 0$, h_0 est une projection de base $\Delta((1; 2))$ et de direction $\Delta((1; 1))$; c) si $m = 2$, h_2 est une symétrie de base $\Delta((1; 0))$ et de direction $\Delta((1; -2))$.

1.5.18 a) h_α n'est pas bijectif si $\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$; b) h_α est une projection de base $\Delta((1; 1))$ et de direction $\Delta((1; -1))$ si $\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$; c) h_α est une symétrie de base $\Delta((1; 1))$ et de direction $\Delta((1; -1))$ si $\alpha \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

1.5.19 a) si $a = 0$ et $b = -1$; b) $a = -1$ et $\ker(h) = \Delta((1; -b; 1))$.

1.5.20 a) 2 et 3 ; b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; c) $A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $A = PA'P^{-1}$; d) $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2^n - 3^n \\ -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$.

1.5.21 b) Les seules valeurs propres possibles de h sont 1 ou -1 .