2.275

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

zéros de f : $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \iff x^2(x-2) - (x-2) = 0$

$\iff (x-2)(x^2-1) = 0 \iff (x-2)(x-1)(x+1) = 0$

$x_1 = -1 \quad x_2 = 1 \quad x_3 = 2$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 2\right)$$

$$= -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3}$$

$$\int_{1}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \Big|_{1}^{2} = 4 - \frac{16}{3} - 2 + 4 - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)$$

$$= 6 - \frac{16}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{48 - 64 - 3 + 8 + 6}{12} = -\frac{5}{12}$$

$\Rightarrow$ aire $= \frac{8}{3} + \left|-\frac{5}{12}\right| = \frac{32 + 5}{12} = \frac{37}{12}\ u^2$

b) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ f est impaire

zéros de f : $x_1 = -2 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 2$

$$-\frac{1}{2}\int_0^2 -2x\,\underbrace{(4-x^2)^{1/2}}_{u}\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(4-x^2)^{3/2}\Big|_0^2 = -\frac{1}{3}(0 - 8) = \frac{8}{3}$$

$\Rightarrow$ aire $= 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3}\ u^2$

c) zéros : $2x + 3 = 0 \iff x = -\frac{3}{2}$ ✓

$-x = 0 \iff x = 0$ ✓

$$\int_{-3/2}^{-1} (2x+3)\,dx = x^2 + 3x \Big|_{-3/2}^{-1} = 1 - 3 - \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\right) = -2 + \frac{9}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\int_{-1}^{0} -x\,dx = -\frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow A = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\ u^2$$

d) Si $x \geq 0$ zéros : $-x^2 + 6x + 7 = 0 \iff x^2 - 6x - 7 = 0$

$\iff (x-7)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow x = 7$ ($x = -1$ sol. à rejeter)

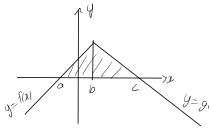
Si $x < 0$ zéros $-x^2 - 6x + 7 = 0 \iff x^2 + 6x - 7 = 0$

$\iff (x+7)(x-1) = 0 \quad \Rightarrow x = -7$ ($x = 1$ sol. à rejeter)

f est paire ($f(-x) = f(x)$)

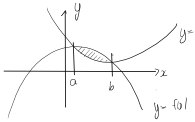
$$\int_0^7 \left(-x^2 + 6x + 7\right)dx = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 7x \Big|_0^7 = -\frac{343}{3} + 147 + 49 = \frac{245}{3}$$

$\Rightarrow A = 2 \cdot \frac{245}{3} = \frac{490}{3}\ u^2$



$\int_a^b f(x)\,dx$

$\int_b^c g(x)\,dx$



$\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\,dx$

2.22)

a) pts d'int. : $x^2-3=2x \iff \underbrace{x^2-2x-3}_{f(x)-g(x)}=0$

$\iff (x-3)(x+1)=0 \iff x_1=-1$ et $x_2=3$

$$\int_{-1}^{3}\big(f(x)-g(x)\big)\,dx=\int_{-1}^{3}\left(x^2-2x-3\right)dx=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x\Big|_{-1}^{3}$$

$$=\cancel{9}-\cancel{9}-9-\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)=-9+\frac{1}{3}-2=-\frac{32}{3}$$

$\Rightarrow A=\frac{32}{3}\,u^2$

b) pts d'int. : $x^2=8-x^2 \iff \underbrace{2x^2-8}_{f(x)-g(x)\ \to\ \text{parab}}=0$

$\iff 2(x^2-4)=0 \iff 2(x-2)(x+2)=0 \iff x_1=-2$ et $x_2=2$

$$\int_0^2\big(f(x)-g(x)\big)\,dx=\int_0^2\left(2x^2-8\right)dx=\frac{2}{3}x^3-8x\Big|_0^2=\frac{16}{3}-16=-\frac{32}{3}$$

$\Rightarrow A=2\left|-\frac{32}{3}\right|=\frac{64}{3}\,u^2$

c) pts d'int. : $x^3-5x^2+6x=x^3-3x^2+12x \iff \underbrace{2x^2-6x}_{f(x)-g(x)}=0$

$\iff 2x(x-3)=0 \Rightarrow x_1=0$ et $x_2=3$

$$\int_0^3\big(f(x)-g(x)\big)\,dx=\int_0^3\left(2x^2-6x\right)dx=\frac{2}{3}x^3-3x^2\Big|_0^3=18-27=-9$$

$\Rightarrow A=9\,u^2$

d) pts d'int. : $x\left(6-2x^2\right)=x\left(2-x^2\right) \iff x\left(6-2x^2-2+x^2\right)=0$

$\iff \underbrace{x}_{}\underbrace{\left(4-x^2\right)}_{4x-x^3}=0 \iff x(2-x)(2+x)=0 \Rightarrow x_1=-2,\ x_2=0$ et $x_3=2$

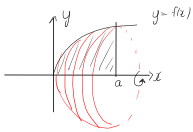
$4x-x^3$ impaire ; $f(x)-g(x)$

$$\int_0^2\big(f(x)-g(x)\big)\,dx=\int_0^2\left(4x-x^3\right)dx=2x^2-\frac{1}{4}x^4\Big|_0^2$$

$$=8-4=4$$

$\Rightarrow A=2\cdot 4=8\,u^2$

Volume d'un solide de révolution



On considère f une fonction continue sur $[a,b]$ et D la surface plane limitée par l'axe Ox, les verticales $x=a$ et $x=b$ ainsi que la courbe $y=f(x)$. On fait tourner D autour de l'axe Ox et on obtient un solide de révolution de volume

$$\boxed{V=\int_a^b \pi\,[f(x)]^2\,dx=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx}$$

De même, le volume d'un solide de révolution obtenu par la rotation d'une surface plane D limitée par les courbes

de volume

$$V = \int_a^b \pi \left[f(x)\right]^2 dx = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx$$

De même, le volume d'un solide de révolution obtenu par la rotation d'une surface plane D limitée par les courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$ (avec $f(x) \geq g(x)$ sur $[a,b]$) et les verticales $x=a$ et $x=b$ se calcule

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x)\right]^2 dx - \pi \int_a^b \left[g(x)\right]^2 dx$$

2.2.28

a) $y = \sin(x)$ $\quad y = -x^2 + a$ $\quad \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

$f(x) = \sin(x)$ $\quad g(x) = -x^2 + a$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4} + a = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = 1 + \frac{\pi^2}{4}$$

$$\int_0^{\pi/2} \left(g(x) - f(x)\right) dx = \int_0^{\pi/2} \left(-x^2 + a - \sin(x)\right) dx = -\frac{1}{3}x^3 + ax + \cos(x) \Big|_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{\pi^3}{24} + \frac{a\pi}{2} + 0 - \left(0 + 0 + 1\right) = -\frac{\pi^3}{24} + \frac{a\pi}{2} - 1$$

$$= -\frac{\pi^3}{24} + \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right) \cdot \frac{\pi}{2} - 1 = -\frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^3}{8} - 1 = \frac{\pi^3}{12} + \frac{\pi}{2} - 1$$

$$= \frac{\pi^3 + 6\pi - 12}{12} \quad u^2$$

pour vendredi 2.2.28