EXAMEN ECRIT DE MATURITE
EPREUVE DE MATHEMATIQUES
Niveau standard

Corrigé

Problème 1 (23 points)

a) $x^2-24x+144+y^2-28y+196=144+196-240$

$(x-12)^2+(y-14)^2=100$ $\boxed{\Rightarrow C(12;14) \text{ et } r=10\ u}$

b) $T:\ (18-12)^2+(22-14)^2=6^2+8^2=100$ $\boxed{\Rightarrow\ T\in\gamma}$

$D:\ (2-12)^2+(14-14)^2=(-10)^2+0^2=100$ $\boxed{\Rightarrow\ D\in\gamma}$

c) $\overrightarrow{CT}=\overrightarrow{n_t}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}18-12\\22-14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\Rightarrow(t):\ 3x+4y+c=0$

$T\in t\ \Rightarrow 3\cdot18+4\cdot22+c=0\Rightarrow c=-142$ $\boxed{\Rightarrow(t):\ 3x+4y-142=0}$

ou bien : $(t):(18-12)(x-12)+(22-14)(y-14)=100\ \Rightarrow\ (t):3x+4y-142=0$

d) $m_{AB}=\dfrac{19-16}{2-(-2)}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow(AB):\ y=\dfrac{3}{4}x+h$

$A\in(AB)\Rightarrow 16=\dfrac{3}{4}\cdot(-2)+h\Rightarrow h=16+\dfrac{3}{2}=\dfrac{35}{2}\Rightarrow(AB):\ y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{35}{2}$

$x^2+\left(\dfrac{3}{4}x+\dfrac{35}{2}\right)^2-24x-28\cdot\left(\dfrac{3}{4}x+\dfrac{35}{2}\right)+240=0$

$x^2+\dfrac{9}{16}x^2+\dfrac{105}{4}x+\dfrac{1225}{4}-24x-21x-490+240=0$

$25x^2-300x+900=0\Rightarrow 25(x-6)^2=0\Rightarrow x=6$

1 seul point d'intersection, donc la droite AB est tangente à γ au point $\boxed{E(6;22)}$

e) $\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}18+2\\22-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2+2\\19-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$

aire du $\Delta\ ATB=\dfrac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix}20&4\\6&3\end{vmatrix}=\dfrac{1}{2}\cdot(60-24)\boxed{=18\ u^2}$

ou bien : aire du $\Delta\ ATB=\dfrac{1}{2}\cdot\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\cdot\delta(T;AB)=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot\dfrac{36}{5}=18\ u^2$

f) Soit *C′* le centre du cercle α ; *C′* est aligné avec *C* et *D*

$$\Rightarrow C'\left(-\frac{1}{2};14\right) \text{ et } (\alpha) : \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-14)^2=\frac{25}{4}$$

g) $$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}x+\frac{35}{2}-14\right)^2=\frac{25}{4} \Rightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}x+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

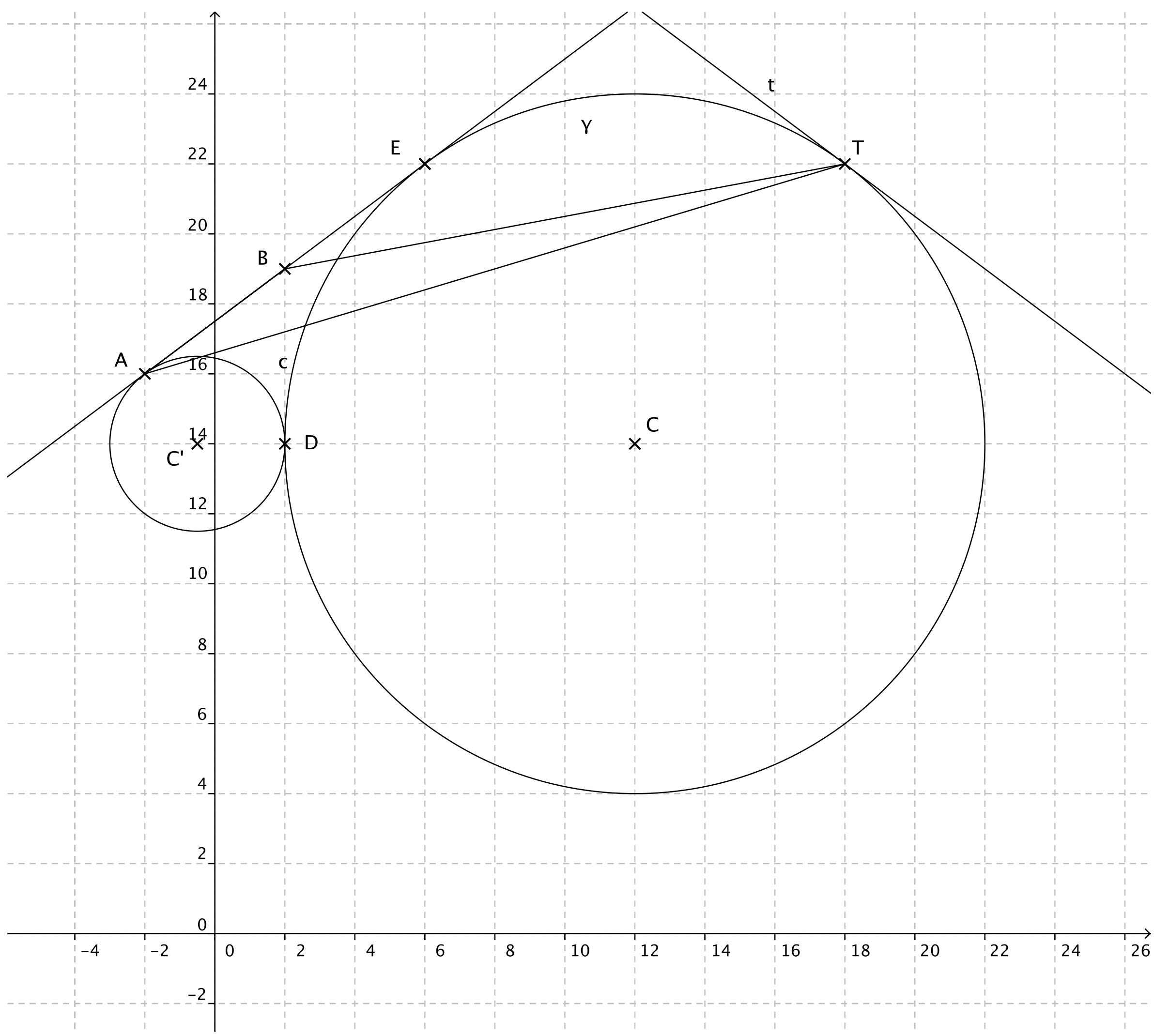
$$x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{9}{16}x^2+\frac{21}{4}x+\frac{49}{4}=\frac{25}{4}$$

$$25x^2+100x+100=0 \Rightarrow 25(x+2)^2=0 \Rightarrow x=-2$$

1 seul point d'intersection $\Rightarrow$ la droite *AB* est tangente à α au point *A*(-2;16)

ou bien : $A \in \alpha$ et $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC'} \Rightarrow$ la droite *AB* est tangente à α au point *A*(-2;16)

ou bien : $\delta(C';AB)=\dfrac{\left|3\cdot(-\frac{1}{2})-4\cdot 14+70\right|}{5}=\dfrac{5}{2}=$ rayon du cercle $\alpha \Rightarrow \alpha$ est tangent à *AB*.



EXAMEN ECRIT DE MATURITE
EPREUVE DE MATHEMATIQUES
Niveau standard

Corrigé

Problème 1 (25 points)

a) $x^2+6x+9+y^2+10y+25=9+25+135$

$(x+3)^2+(y+5)^2=169$ $\boxed{\Rightarrow C(-3;-5) \text{ et } r=13\ u}$

b) $T:\ (2+3)^2+(7+5)^2=5^2+12^2=25+144=169$ $\boxed{\Rightarrow\ T\in\gamma}$

$\overrightarrow{CT}=\overrightarrow{n_t}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}2+3\\7+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}\Rightarrow(t):5x+12y+c=0$

$T\in t\Rightarrow 5\cdot 2+12\cdot 7+c=0\Rightarrow c=-94$ $\boxed{\Rightarrow(t):5x+12y-94=0}$

ou bien : $(t):(2+3)(x+3)+(7+5)(y+5)=169$ $\boxed{\Rightarrow(t):5x+12y-94=0}$

c) soit p la perpendiculaire à t passant par T :
$\Rightarrow (p):\ 12x-5y+c^*=0$
$T\in p\Rightarrow 12\cdot 2-5\cdot 7+c^*=0\Rightarrow c^*=11\Rightarrow(p):12x-5y+11=0$

$p\cap d=P=$centre du cercle α

$$\begin{cases}12x-5y+11=0\\2x-3y+30=0\end{cases}\Rightarrow P(\frac{9}{2};13)$$

$$\overrightarrow{PT}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{9}{2}\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\-6\end{pmatrix}\Rightarrow\left\|\overrightarrow{PT}\right\|^2=(-\frac{5}{2})^2+(-6)^2=\frac{169}{4}=(r')^2$$

$$\boxed{\Rightarrow(\alpha):(x-\frac{9}{2})^2+(y-13)^2=\frac{169}{4}}$$

d) $(d):2x-3y+30=0\Rightarrow(d):y=\frac{2}{3}x+10$

$$x^2+\left(\frac{2}{3}x+10\right)^2+6x+10\cdot\left(\frac{2}{3}x+10\right)-135=0$$

$$x^2+\frac{4}{9}x^2+\frac{40}{3}x+100+6x+\frac{20}{3}x+100-135=0$$

$13x^2+234x+585=0 \Rightarrow 13(x+3)(x+15)=0 \Rightarrow x=-3$ et $x=-15$

2 points d'intersection : $\boxed{I_1(-3;8) \text{ et } I_2(-15;0)\equiv B}$

e) $m_{CB}=\dfrac{0-(-5)}{-15-(-3)}=\dfrac{5}{-12}=-\dfrac{5}{12}$ et $m_t=-\dfrac{5}{12}\Rightarrow m_{CB}=m_t=-\dfrac{5}{12}$

$\boxed{\Rightarrow \text{ les droites } CB \text{ et } t \text{ sont parallèles}}$

f) $2\cdot(-2)-3\cdot(\frac{26}{3})+30=-4-26+30=0\Rightarrow A\in d$ ①

$5\cdot(-2)+12\cdot(\frac{26}{3})-94=-10+104-94=0\Rightarrow A\in t$ ②

① et ② $\boxed{\Rightarrow A\in d\cap t}$

ou bien : $\begin{cases}2x-3y+30=0\\5x+12y-94=0\end{cases}\Rightarrow A(-2;\frac{26}{3})$

g) *ABCT* est un trapèze rectangle.

$$\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\\frac{26}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-\frac{5}{3}\end{pmatrix}\Rightarrow\left\|\overrightarrow{AT}\right\|=\sqrt{4^2+(-\frac{5}{3})^2}=\frac{13}{3}$$

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-15\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-5\end{pmatrix}\Rightarrow\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{12^2+(-5)^2}=13$$

$$\overrightarrow{CT}=\overrightarrow{OT}-\overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}\Rightarrow\left\|\overrightarrow{CT}\right\|=\sqrt{5^2+12^2}=13$$

aire de *ABCT*= $\dfrac{\left\|\overrightarrow{AT}\right\|+\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}{2}\cdot\left\|\overrightarrow{CT}\right\|=\dfrac{\frac{13}{3}+13}{2}\cdot 13=\dfrac{26}{3}\cdot 13=\boxed{\dfrac{338}{3}\ u^2}$

Gymnase de Burier

Session d'août 2011

EXAMEN ÉCRIT DE L'ÉCOLE DE MATURITÉ

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Niveau standard

CORRIGÉ

Problème 1 (22 points)

a) $(x-3)^2+(y+2)^2=25 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C(3;-2) \quad \text{et} \quad r=5\text{ u}}$

b) $A \in \gamma: \ 36+4-36+8-12=0$ ✓

$(a): \ 3(x-3)+4(y+2)=25 \quad \Rightarrow \quad (a): \ 3x+4y=26$

$\Rightarrow \boxed{(a): \ 3x+4y-26=0}$

c) $3-\underbrace{5}_{r}=-2 \qquad 3+\underbrace{5}_{r}=8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(b): \ x=-2}$

$a \cap b: \ \begin{cases} 3x+4y=26 \\ x=-2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 3\cdot(-2)+4y=26 \quad \Rightarrow \quad y=\dfrac{32}{4}=8 \quad \Rightarrow \boxed{I(-2;8)}$

d) $\delta(C;d)=\dfrac{|12+6-42|}{5}=\dfrac{24}{5} \neq 5$ (rayon du cercle) $\quad \Rightarrow \boxed{\text{l'élève a tort}}$

e) $(t): \ y=mx+h \qquad E \in t \quad \Rightarrow \quad 5=4m+h \quad \Rightarrow \quad h=5-4m$

$\Rightarrow \quad (t): \ y=mx+5-4m$

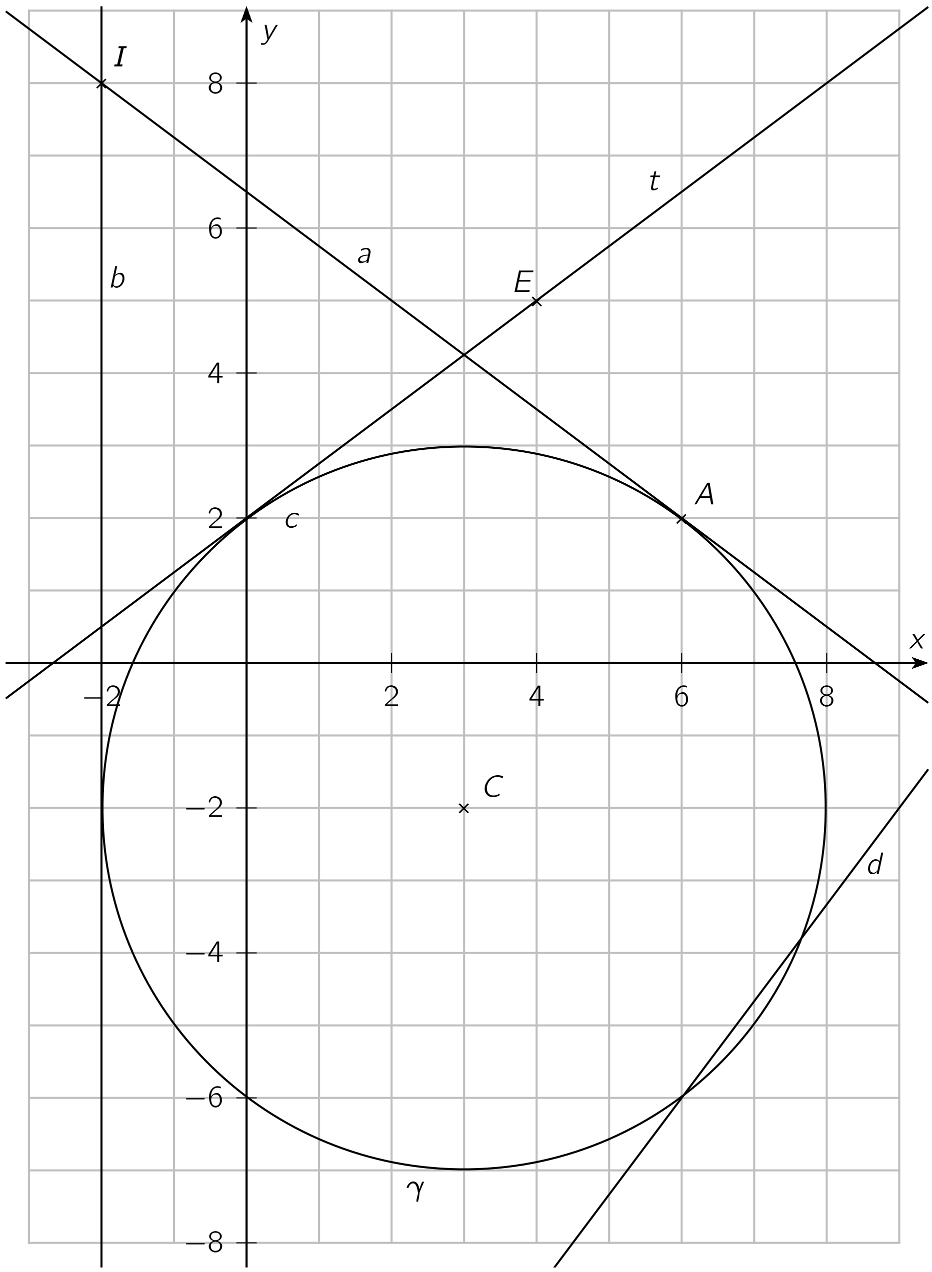
$\delta(C;t)=5 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{|3m+2+5-4m|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{|7-m|}{\sqrt{m^2+1}}=5 \quad \Rightarrow \quad |7-m|=5\sqrt{m^2+1}$

$\Rightarrow \quad (|7-m|)^2=25(m^2+1) \quad \Rightarrow \quad 49-14m+m^2=25m^2+25$

$\Rightarrow \quad 24m^2+14m-24=0$

$\Rightarrow \quad 2(12m^2+7m-12)=0 \quad \Rightarrow \quad 2(4m-3)(3m+4)=0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{3}{4} \ ✓ \\[2ex] m=-\dfrac{4}{3} \ \text{(sol. à élim.)} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \quad (t): \ y=\dfrac{3}{4}x+5-3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(t): \ 3x-4y+8=0}$


y
x
I
8
6
4
2
−2
−4
−6
−8
2
4
6
8
a
b
t
E
c
A
C
d
γ

Gymnase de Burier

Session de juin 2011

EXAMEN ÉCRIT DE L'ÉCOLE DE MATURITÉ

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
Niveau standard

CORRIGÉ

Problème 1 (28 points)

a) $T \in \gamma : \;\; 16 + 25 - 16 - 10 = 15 \;\checkmark$

b) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 20 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C(-2;1) \quad \text{et} \quad r = 2\sqrt{5} \text{ u}}$

c) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y = 15 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = -2x + 7 \\ x^2 + (-2x+7)^2 + 4x - 2(-2x+7) = 15 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2 + 4x^2 - 28x + 49 + 4x + 4x - 14 = 15 \quad \Rightarrow \quad 5x^2 - 20x + 20 = 0$

$\Rightarrow 5(x-2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow$ 1 seul point d'intersection $\boxed{A(2;3)}$

$\Rightarrow$ $\boxed{a \text{ est une droite tangente à } \gamma}$

d) $(t) : \;\; -2(x+2) + 4(y-1) = 20 \quad \Rightarrow \quad (t) : \;\; -2x + 4y = 28$

$\Rightarrow \boxed{(t) : \;\; x - 2y + 14 = 0}$

e) $(a) : \;\; y = -2x + 7 \quad \Rightarrow \quad m_a = -2$

$(t) : \;\; y = \dfrac{1}{2}x + 7 \quad \Rightarrow \quad m_t = \dfrac{1}{2}$

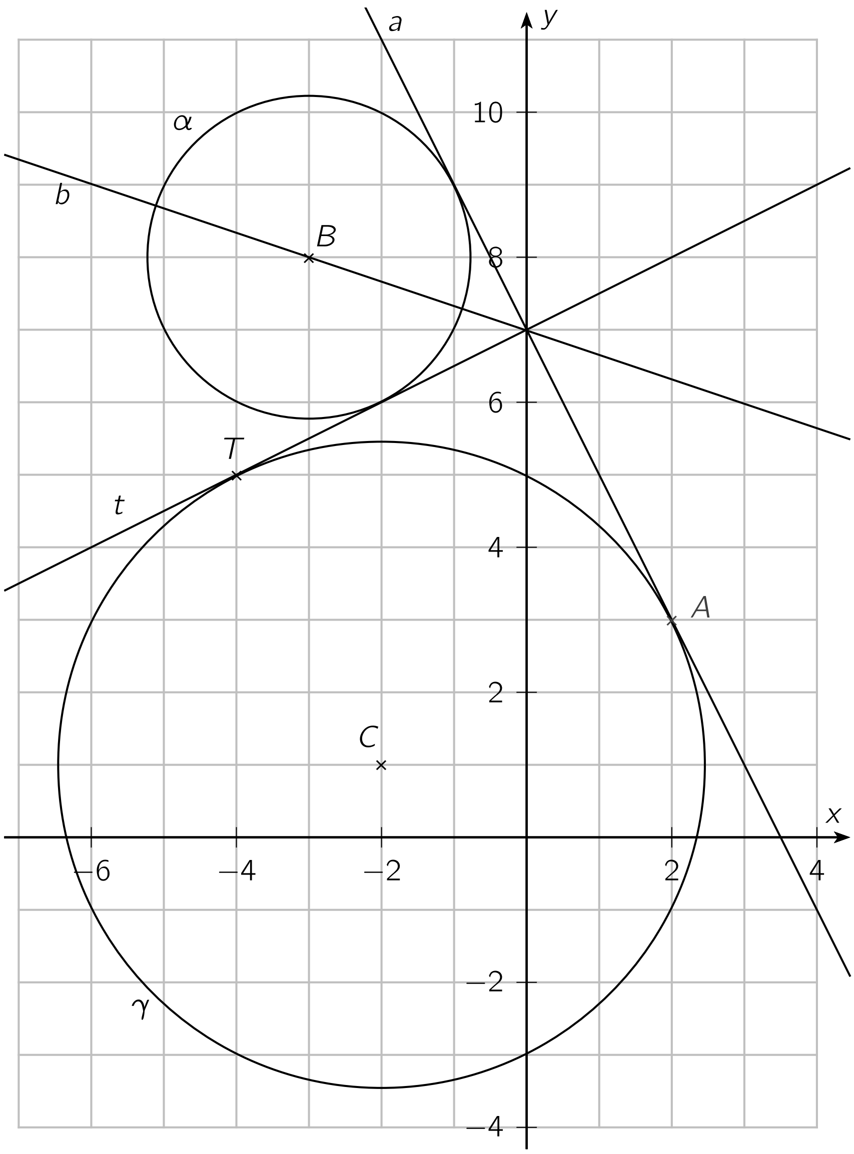
$\Rightarrow \quad m_a \cdot m_t = (-2) \cdot \dfrac{1}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad$ a est perpendiculaire à t

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{l'angle entre les droites } a \text{ et } t \text{ vaut } 90^\circ}$

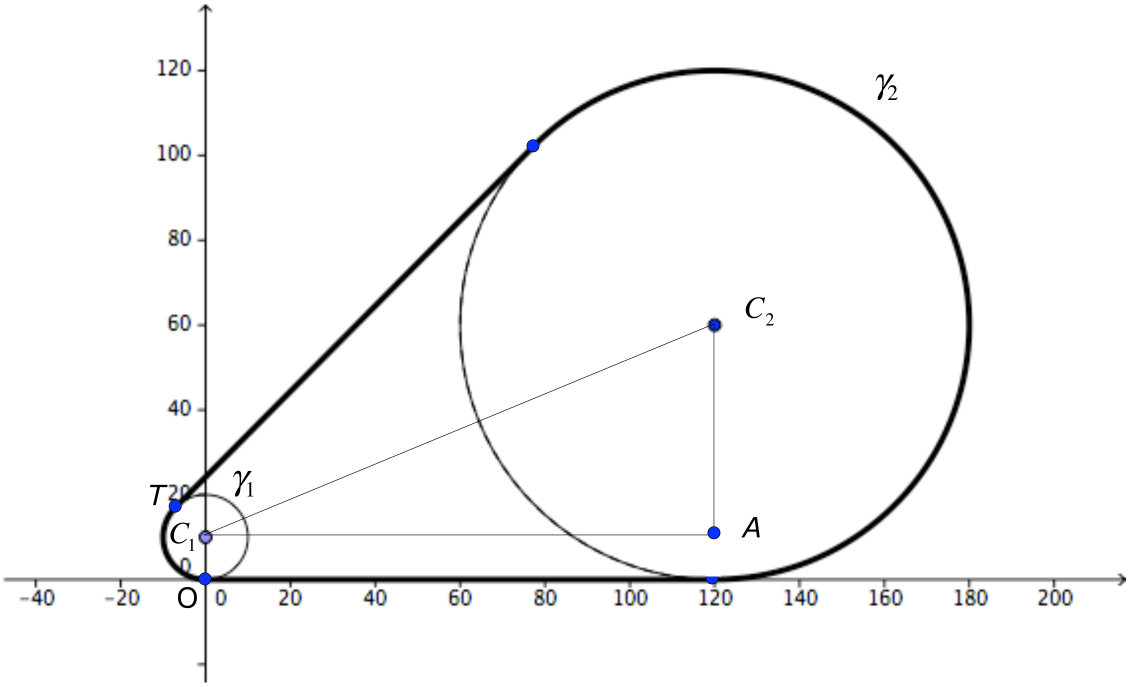
f) $\dfrac{2x+y-7}{\sqrt{5}} = \pm\dfrac{x-2y+14}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{lll} 2x+y-7 = x-2y+14 & \Rightarrow & x+3y=21 \quad \checkmark \\ 2x+y-7 = -x+2y-14 & \Rightarrow & 3x-y=-7 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \boxed{(b):\ x+3y-21=0} \qquad B \in b:\ -3+24-21=0\ \checkmark$

g) $\delta(B;a) = \dfrac{|-6+8-7|}{\sqrt{5}} = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \quad \Rightarrow \boxed{(\alpha):\ (x+3)^2+(y-8)^2=5}$



Exercice 3 :



a) $(\gamma_1): x^2+(y-10)^2=100$ ou $(\gamma_1): x^2+y^2-20y=0$

b) $\overline{AC_2} = 60 - 10 = 50$ et $\overline{C_1C_2}=130$

$\overline{AC_1}=\sqrt{130^2-50^2}=120$ $\Rightarrow$ C_2 (120 ; 60)

c) Pente $m_{C_1C_2}=\dfrac{60-10}{120}=\dfrac{5}{12}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{y-10}{x}=\dfrac{5}{12}$ $\Rightarrow$ $(C_1C_2): 5x-12y+120=0$

d) Equation de la droite OT perpendiculaire à la droite C_1C_2 : $(OT): 12x+5y=0$

$$C_1C_2 \cap OT : \begin{cases} 12x+5y=0 \\ 5x-12y+120=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{12}{5}x \\ 25x+144x+600=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{600}{169} \\ y=\dfrac{1440}{169} \end{cases}$$

$\overrightarrow{OT}=2\cdot\begin{pmatrix} -\dfrac{600}{169} \\ \dfrac{1440}{169} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1200}{169} \\ \dfrac{2880}{169} \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $T\,(-\dfrac{1200}{169}\ ;\ \dfrac{2880}{169})$. T appartient à γ_1, car

$$\left(-\frac{1200}{169}\right)^2+\left(\frac{2880}{169}\right)^2-20\cdot\frac{2880}{169}=\frac{1440000+8294400-9734400}{169^2}=0$$

e) Par dédoublement, $(t):\left(-\frac{1200}{169}\right)\cdot x+\left(\frac{2880}{169}-10\right)(y-10)=100$

Ainsi (t) $-\frac{1200}{169}x+\frac{1190}{169}\cdot(y-10)=100$

Ou encore (t) $120x-119y+2880=0$

CORRIGE MATH STANDARD

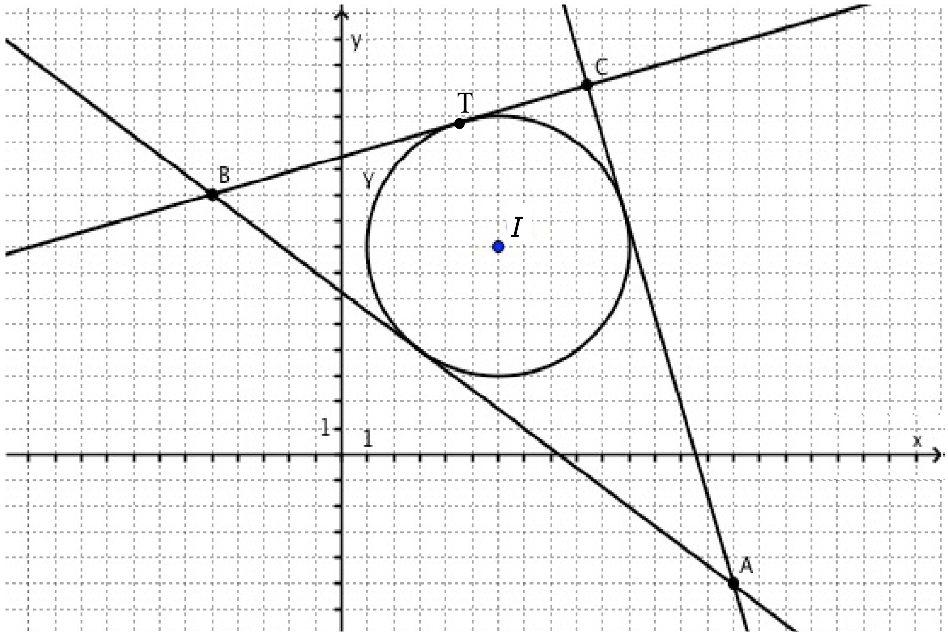
Exercice 1 :

a) (γ) : $x^2-12x+36+y^2-16y+64-(36+64)+75=0$

(γ) : $(x-6)^2+(y-8)^2=25 \quad \Rightarrow I(6\ ;\ 8)$ et $r = 5$.

b) $T \in \gamma$ car $(4,6 - 6)^2 + (12,8 - 8)^2 = 1,96+ 23,04 = 25 = r^2$

c)



d) BC tangente à γ en T :

Equation dédoublée : $-1,4(x-6)+4,8(y-8)-25=0$

$-1,4x+4,8y-55=0 \quad \Rightarrow \quad (BC): -7x+24y-275=0$

e) $AB \cap BC : \begin{cases} 3x+4y-25=0 \\ -7x+24y-275=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -25x=125 \\ 3x+4y-25=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=10 \end{cases} \Rightarrow B\ (-5\ ;\ 10)$

f) A appartient à la droite AC : $24\cdot 15+7\cdot(-5)-325=0$

Distance du centre du cercle $I(6;8)$ à la droite AC :

$\delta = \dfrac{|24\cdot 6+7\cdot 8-325|}{\sqrt{24^2+7^2}} = \dfrac{125}{25} = 5 = r \qquad \Leftrightarrow$ la droite AC est tangente au cercle γ

g) $AC \cap BC : \begin{cases} 24x+7y-325=0 \\ -7x+24y-275=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=14,2 \\ x=9,4 \end{cases} \Rightarrow C\left(\dfrac{47}{5}\ ;\ \dfrac{71}{5}\right)$

h) Pente de la droite AC : $m_{AC}=-\dfrac{24}{7}$ pente de la droite BC : $m_{BC}=\dfrac{7}{24}$

$m_{AC}\cdot m_{BC}=-1 \Rightarrow$ les droites AC et BC sont perpendiculaires et le triangle ABC est rectangle en C.