Chapitre 2

Géométrie

2.1 Le cercle

2.1.1 Indiquer, parmi les équations données ci-dessous, celles qui définissent un cercle. Déterminer alors les coordonnées du centre et le rayon du cercle :

a) $(x-5)^2+(y+2)^2=25$

b) $(x+2)^2+y^2=64$

c) $(x-5)^2+(y+2)^2=0$

d) $x^2+(y-5)^2=5$

e) $x^2+y^2-2x+4y=20$

f) $x^2+y^2-2x+4y+14=0$

g) $x^2+y^2+4x-2y+5=0$

h) $x^2+y^2+x=0$

i) $x^2+y^2+6x-4y+14=0$

j) $x^2+y^2+y=0$

k) $80x^2+80y^2-120x+80y+17=0$

l) $144x^2+144y^2-216x+192y=-145$

2.1.2 Déterminer l'équation des cercles définis par les conditions suivantes :

a) Le centre est l'origine et le rayon est égal à 3.

b) Le centre est $C(2;-3)$ et le rayon est égal à 7.

c) Le cercle passe par l'origine et son centre est $C(6;-8)$.

d) Le cercle passe par $A(2;6)$ et son centre est $C(-1;2)$.

e) Les points $A(3;2)$ et $B(-1;6)$ sont les extrémités d'un diamètre.

f) Le centre est l'origine et le cercle est tangent à $d: 3\,x-4\,y+20=0$.

g) Le centre est $C(1;-1)$ et le cercle est tangent à $d: 5\,x+9=12\,y$.

h) Le cercle passe par $A(3;1)$ et par $B(-1;3)$ et son centre est sur $d: 3\,x=y+2$.

i) Le cercle passe par $A(1;1)$, par $B(1;-1)$ et par $C(2;0)$.

2.1.3 Déterminer la position relative des deux objets suivants :

a) la droite $y = 2x - 3$ et le cercle $x^2 + y^2 - 3x + 2y = 3$;

b) la droite $x - 2y - 1 = 0$ et le cercle $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$;

c) la droite $y = x + 10$ et le cercle $x^2 + y^2 = 1$.

2.1.4 Déterminer la position relative des cercles

$$\gamma_1 : x^2 + y^2 - 16x - 20y + 115 = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_2 : x^2 + y^2 + 8x - 10y + 5 = 0$$

2.1.5 Déterminer l'équation du diamètre du cercle $x^2 + y^2 + 4\,x - 6\,y = 17$ qui est perpendiculaire à la droite $5\,x + 2y = 13$.

2.1.6 Calculer la plus courte distance d'un point du cercle $x^2 + y^2 - 26\,x + 30\,y = -313$ au point $B(3;9)$.

2.1.7 Déterminer l'équation du diamètre du cercle $\gamma : (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$ qui passe par le point milieu de la corde de support $d : 2\,x + y = 13$.

2.1.8 Calculer la longueur de la corde commune aux cercles $\gamma_1 : x^2 + y^2 = 10\,x + 10\,y$ et $\gamma_2 : x^2 + y^2 + 6\,x + 2\,y = 40$.

2.1.9 Déterminer les équations des cercles qui ont leur centre sur la droite $4\,x - 5\,y = 3$ et qui sont tangents aux deux droites $2\,x = 3\,y + 10$ et $2\,y = 3\,x + 5$.

2.1.10 Déterminer l'équation du cercle qui, ayant son centre sur la droite $2\,x + y = 0$, est tangent aux droites $3\,y = 4\,x + 10$ et $4\,x = 3\,y + 30$.

2.1.11 Déterminer les équations des cercles de rayon $\sqrt{5}$ qui sont tangents à la droite $x - 2\,y = 1$ au point $T(3;?)$.

2.1.12 Déterminer les équations des cercles tangents aux droites

$$y = 7\,x - 5 \quad \text{et} \quad x + y + 13 = 0$$

l'un des points de contact étant $T(1;2)$.

2.1.13 Déterminer les équations des cercles passant par l'origine et qui sont tangents aux droites $x + 2\,y = 9$ et $y = 2\,x + 2$.

2.1.14 Déterminer les équations des cercles tangents aux trois droites $3\,y = 4\,x - 10$, $3\,x = 4\,y + 5$ et $3\,x - 4\,y = 15$.

2.1.15 Déterminer l'équation du symétrique du cercle $x^2 + y^2 - 2\,x - 4\,y + 4 = 0$ relativement à la droite $x = y + 3$.

2.1.16 Après avoir vérifié que le point T est sur le cercle γ, Déterminer les équations des tangentes à γ au point T dans les cas suivants :

a) $T(-1; 2)$ et $\gamma : x^2 + y^2 = 5$;

b) $T(-5; 7)$ et $\gamma : (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$;

c) $T(0; 0)$ et $\gamma : x^2 + y^2 = 3x - 7y$;

d) $T(-1; 2)$ et $\gamma : x^2 + y^2 - 2x + 6y = 19$;

e) $T(2; 3)$ et $\gamma : 2x^2 + 2y^2 = x + 4y + 12$;

f) $T(2; 1)$ et $\gamma : 3x^2 + 3y^2 = 2x + 11$.

2.1.17 Calculer la valeur de l'angle [1] aigu formé par la droite $3\,x - y = 1$ et le cercle $(x - 2)^2 + y^2 = 5$.

2.1.18 Calculer l'angle [2] sous lequel se coupent les cercles $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 8$ et $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$.

2.1.19 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 + 10\,x = 2\,y - 6$, de direction donnée par la droite $2\,x + y = 7$.

2.1.20 Former les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 - 2\,x + 4\,y = 0$, qui sont perpendiculaires à la droite $x = 2\,y + 345$.

---

1. L'*angle d'une droite et d'un cercle* est l'angle formé par la droite et la tangente au cercle en l'un des points d'intersection
2. L'*angle de deux cercles* est l'angle formé par les tangentes aux cercles en l'un des points d'intersection

2.1.21 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 19 - 2\,x$ issues du point $A(1; 6)$, ainsi que les coordonnées du point de contact.

2.1.22 Déterminer les équations des tangentes au cercle $x^2 + y^2 - 2\,x + 4\,y = 20$ issues du point $A(6; 5)$, ainsi que les coordonnées des deux points de contact.

2.1.23 On mène par le point $A(4; 2)$ les tangentes au cercle $x^2+y^2 = 10$. Calculer l'angle entre ces tangentes.

2.1.24 On mène par le point $A(4; -4)$ les tangentes au cercle $x^2 + y^2 = 6\,x - 2\,y - 5$. Calculer la longueur de la corde passant par les points de tangence.

2.2 Solutions des exercices

Le cercle

2.1.1

a) $C(5;-2) \quad r=5$

b) $C(-2;0) \quad r=8$

c) $C(5;-2) \quad r=0$
Il s'agit d'un point !

d) $C(0;5) \quad r=\sqrt{5}$

e) $C(1;-2) \quad r=5$

f) $\emptyset$

g) $C(-2;1) \quad r=0$
Il s'agit d'un point !

h) $C\left(-\frac{1}{2};0\right) \quad r=\frac{1}{2}$

i) $\emptyset$

j) $C\left(0;-\frac{1}{2}\right) \quad r=\frac{1}{2}$

k) $C\left(\frac{3}{4};-\frac{1}{2}\right) \quad r=\sqrt{0.6}$

l) $C\left(\frac{3}{4};-\frac{2}{3}\right) \quad r=0$
Il s'agit d'un point !

2.1.2

a) $x^2+y^2=9$

b) $(x-2)^2+(y+3)^2=49$

c) $(x-6)^2+(y+8)^2=100$

d) $(x+1)^2+(y-2)^2=25$

e) $(x-1)^2+(y-4)^2=8$

f) $x^2+y^2=16$

g) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$

h) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$

i) $(x-1)^2+y^2=1$

2.1.3

a) La droite coupe le cercle.

b) La droite est tangente au cercle.

c) La droite et le cercle sont disjoints.

2.1.4 Les cercles sont tangents extérieurement.

2.1.5 $2\,x-5\,y+19=0$

2.1.6 17

2.1.7 $x-2\,y-4=0$

2.1.8 10

2.1.9 $(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{81}{13}$ et $(x+8)^2+(y+7)^2=\frac{25}{13}$

2.1.10 $(x-1)^2+(y+2)^2=16$

2.1.11 $(x-4)^2+(y+1)^2=5$ et $(x-2)^2+(y-3)^2=5$

2.1.12 $(x+6)^2+(y-3)^2=50$ et $(x-29)^2+(y+2)^2=800$

2.1.13 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ et $\left(x-\frac{22}{5}\right)^2+\left(y+\frac{31}{5}\right)^2=\frac{289}{5}$

2.1.14 $\left(x+\frac{10}{7}\right)^2+\left(y+\frac{25}{7}\right)^2=1$ et $\left(x-\frac{30}{7}\right)^2+\left(y-\frac{5}{7}\right)^2=1$

2.1.15 $(x-5)^2+(y+2)^2=1$

2.1.16

a) $x-2\,y+5=0$

b) $3\,x-4\,y+43=0$

c) $3\,x-7\,y=0$

d) $2\,x-5\,y+12=0$

e) $7\,x+8\,y-38=0$

f) $5\,x+3\,y-13=0$

2.1.17 45°

2.1.18 90°

2.1.19 $2\,x+y-1=0$ et $2\,x+y+19=0$

2.1.20 $2\,x+y-5=0$ et $2\,x+y+5=0$

2.1.21 $2\,x+y-8=0$ et $x-2\,y+11=0$ $T_1(3;2)$ $T_2(-3;4)$

2.1.22 $x=6$ et $12\,x-35\,y+103=0$ $T_1(6;-2)$ $T_2\left(-\frac{23}{37};\frac{101}{37}\right)$

2.1.23 90°

2.1.24 $\sqrt{10}$