

Les intégrales

Rappel: $1+2+3+\dots+n = \sum_{i=1}^n i$

$$① \sum_{i=1}^n (i+1)^2 = 2^2+3^2+\dots+(n+1)^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^n i^2}_{1^2+2^2+\dots+n^2} + (n+1)^2 - 1^2$$

$$② \sum_{i=1}^n (i+1)^2 = \sum_{i=1}^n (i^2+2i+1) = \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n 2i + \sum_{i=1}^n 1$$

$$①=② \Rightarrow \sum_{i=1}^n i^2 + (n+1)^2 - 1 = \sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n 2i + \sum_{i=1}^n 1$$

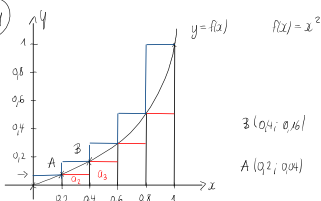
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n 2i + \sum_{i=1}^n 1 = (n+1)^2 - 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n 2i = (n+1)^2 - 1 - \sum_{i=1}^n 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^n i = (n+1)^2 - 1 - n \quad \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ termes}}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum_{i=1}^n i = n^2 + n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n i = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

De même, on montre que $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

1.2.1



Somme des aires des rectangles inférieurs:

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 0.2 \cdot 0.2^2 = 0.008 \quad a_3 = 0.2 \cdot 0.4^2 = 0.032$$

$$a_4 = 0.2 \cdot 0.6^2 = 0.072 \quad a_5 = 0.2 \cdot 0.8^2 = 0.128$$

$$u_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0.24$$

Somme des aires des rectangles supérieurs:

$$v_5 = u_5 + b_5 = u_5 + 0.2 \cdot 1^2 = 0.44$$

$$\Rightarrow 0.24 \leq A \leq 0.44$$

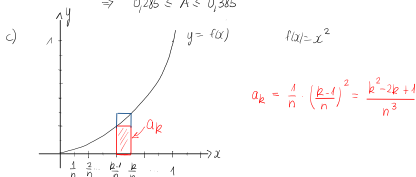
$$b) \quad a_1 = 0 \quad a_2 = 0.1 \cdot 0.1^2 = 0.001 \quad a_3 = 0.1 \cdot 0.2^2 = 0.004 \quad a_4 = 0.1 \cdot 0.3^2 = 0.009$$

$$a_5 = 0.1 \cdot 0.4^2 = 0.016 \quad a_6 = 0.1 \cdot 0.5^2 = 0.025 \quad a_7 = 0.1 \cdot 0.6^2 = 0.036$$

$$a_8 = 0.1 \cdot 0.7^2 = 0.049 \quad a_9 = 0.1 \cdot 0.8^2 = 0.064 \quad a_{10} = 0.1 \cdot 0.9^2 = 0.081$$

$$u_{10} = \sum_{i=1}^{10} a_i = 0.285 \quad v_{10} = u_{10} + 0.1 \cdot 1^2 = 0.385$$

$$\Rightarrow 0.285 \leq A \leq 0.385$$



$$u_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 - 2k + 1}{n^3} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n (k^2 - 2k + 1)$$

$$= \frac{1}{n^3} \left[\sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n (-2k) + \sum_{k=1}^n 1 \right]$$

$$= \frac{1}{n^3} \left[\sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \right]$$

$$= \frac{1}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \right]$$

$$= \frac{1}{n^3} \left[\sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \right]$$

$$= \frac{1}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \right]$$

$$= \frac{1}{n^3} \left[\frac{n(2n^2+3n+1)}{6} - \frac{2(n^2+n)}{2} + n \right]$$

$$= \frac{1}{n^3} \left(\frac{2n^3+3n^2+n-6n^2-6n+6n}{6} \right) = \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3} = \frac{n(2n^2-3n+1)}{6n^3}$$

$$V_n = u_n + \frac{1}{n} \cdot 1^2 = \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^3} + \frac{1}{n} = \frac{2n^3-3n^2+n+6n^2}{6n^3}$$

$$= \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6n^3} = \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2n^2-3n+1}{6n^2} \leq A \leq \frac{2n^2+3n+1}{6n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3} \cancel{2n^2}}{\cancel{6n^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{3} \cancel{2n^2}}{\cancel{6n^2}} = \frac{1}{3}$$

par le théorème des deux gendarmes $A = \frac{1}{3} a^2$

Primitives

Définition: une fonction F est une primitive de f sur l'intervalle I si $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

Exemple: $f(x) = 2x$ alors $F(x) = x^2$ est une primitive
et aussi $F(x) = x^2 + 4$.

De manière générale $F(x) = x^2 + c \quad c \in \mathbb{R}$

Théorème

Soit F une primitive de f sur un intervalle I ,
alors les fonctions G définies par

$$G(x) = F(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

représentent toutes les primitives de f sur I .

Notation: $\int f(x) dx = F(x) + c$ où $F'(x) = f(x)$

(1.3.1)

$$a) \quad F(x) = \frac{-2}{\sqrt{x^3}} \quad f(x) = \frac{7}{\sqrt{x^9}}$$

$$F(x) = -\frac{2}{x^{3/2}} = -2 x^{-3/2}$$

$$F'(x) = -2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) x^{-3/2-1} = 7 x^{-9/2} = \frac{7}{x^{9/2}} = \frac{7}{\sqrt{x^9}}$$

$$b) \quad F(x) = \frac{2x^2-1}{2-x^2} + 7 \quad f(x) = \frac{6x}{(2-x^2)^2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$F'(x) = \frac{4x(2-x^2) - (2x^2-1)(-2x)}{(2-x^2)^2} = \frac{8x - 4x^3 + 4x^3 - 2x}{(2-x^2)^2}$$

$$= \frac{6x}{(2-x^2)^2} = f(x)$$

$$c) \quad F(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} - 11$$

$$F'(x) = \frac{2\sqrt{x+1} - \cancel{2x} \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = \frac{2\sqrt{x+1} - \frac{x}{\sqrt{x+1}}}{x+1}$$

$$= \frac{\frac{2(x+1) - x}{\sqrt{x+1}}}{x+1} = \frac{2x+2-x}{\sqrt{x+1}(x+1)} = \frac{x+2}{\sqrt{(x+1)^3}} = f(x)$$

Quelques primitives de fonctions élémentaires

$f(x)$	$\int f(x) dx$
1	$x + c \quad (c \in \mathbb{R})$
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad (n \neq -1, c \in \mathbb{R})$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$

Théorème

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

Théorème

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

$$a) \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$b) \int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad (\text{avec } k \in \mathbb{R})$$

Exemples :

$$a) \int x^8 dx = \frac{1}{9} x^9 + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$b) \int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{1/3} dx = \frac{3}{4} x^{4/3} + C \quad (C \in \mathbb{R})$$

$\nwarrow \quad \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$

$$c) \int (3x^7 + 6x^4 - 3x^2 + 7x - 100) dx$$

$$= 3 \frac{1}{8} x^8 + 6 \frac{1}{5} x^5 - 3 \frac{1}{3} x^3 + 7 \frac{1}{2} x^2 - 100x + C$$

$$= \frac{3}{8} x^8 + \frac{6}{5} x^5 - x^3 + \frac{7}{2} x^2 - 100x + C \quad (C \in \mathbb{R})$$