

Fonctions quadratiques, graphes et optimisation

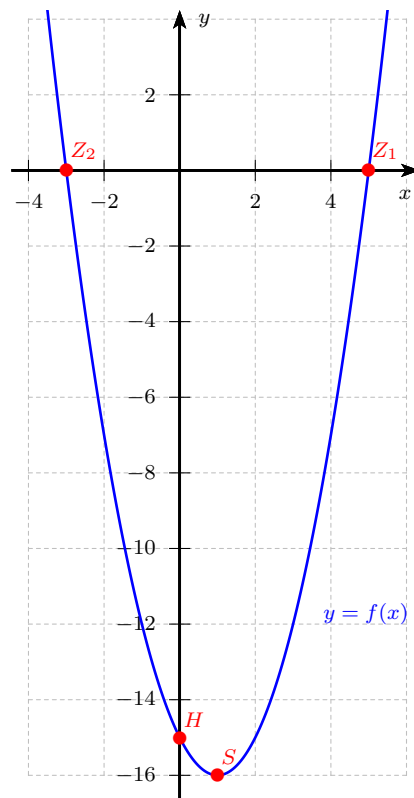
Exercice 1.

a) $f(0) = -15 \Rightarrow H(0; -15)$

$$\Delta = 4 + 60 = 64 \Rightarrow x = \frac{2 \pm 8}{2} \Rightarrow x_1 = 5 \text{ et } x_2 = -3$$

$$\Rightarrow Z_1(5; 0) \text{ et } Z_2(-3; 0)$$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1 \text{ et } \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-64}{4} = -16 \Rightarrow S(1; -16)$$

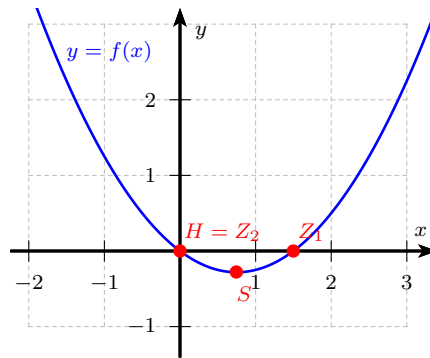


b) $f(0) = 0 \Rightarrow H(0; 0)$

$$\Delta = \frac{9}{16} \Rightarrow x = \frac{\frac{3}{4} \pm \frac{3}{4}}{1} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} \text{ et } x_2 = 0$$

$$\Rightarrow Z_1\left(\frac{3}{2}; 0\right) \text{ et } Z_2(0; 0)$$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{\frac{3}{4}}{1} = \frac{3}{4} \text{ et } \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\frac{9}{16}}{2} = -\frac{9}{32} \Rightarrow S\left(\frac{3}{4}; -\frac{9}{32}\right)$$

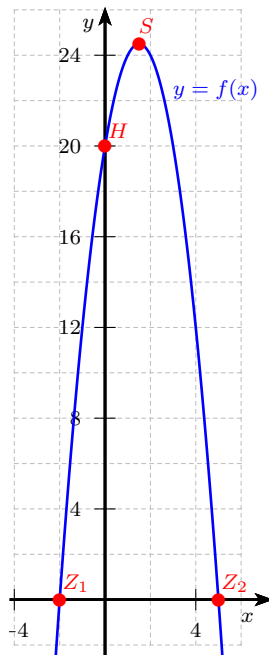


c) $f(0) = 20 \Rightarrow H(0; 20)$

$$\Delta = 36 + 160 = 196 \Rightarrow x = \frac{-6 \pm 14}{-4} \Rightarrow x_1 = -2 \text{ et } x_2 = 5$$

$$\Rightarrow Z_1(-2; 0) \text{ et } Z_2(5; 0)$$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} \text{ et } \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-196}{-8} = \frac{49}{2} \Rightarrow S\left(\frac{3}{2}; \frac{49}{2}\right)$$



Exercice 2.

$$-3x^2 + 5x - 1 = -x - 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$$

$$\Delta = 36 \Rightarrow x = \frac{6 \pm 6}{6} \Rightarrow x_1 = 2 \text{ et } x_2 = 0$$

$$\Rightarrow y_1 = -3 \text{ et } y_2 = -1 \Rightarrow I_1(2; -3) \text{ et } I_2(0; -1)$$

Exercice 3. x = premier nombre y = deuxième nombre

$$x - y = 12 \quad \Leftrightarrow \quad y = x - 12$$

fonction à optimiser $f(x; y) = xy$

$$\Rightarrow f(x) = x(x - 12) = x^2 - 12x \text{ (parabole convexe, minimum au sommet)}$$

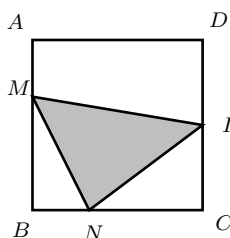
$$\frac{-b}{2a} = \frac{12}{2} = 6 \text{ et } \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-144}{4} = -36 \Rightarrow S(6; -36)$$

 $\Rightarrow$ Le produit est minimal pour les nombres 6 et -6 .**Exercice 4.** x = nombre d'arbres additionnelsfonction à optimiser (le nombre de poires) : $f(x) = (60 + x)(480 - 5x)$

$$\Rightarrow f(x) = 28800 - 300x + 480x - 5x^2 = -5x^2 + 180x + 28800$$

$$\Rightarrow f(x) = -5x^2 + 180x + 28800 \text{ (parabole concave, maximum au sommet)}$$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-180}{-10} = 18 \text{ et } \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-608400}{-20} = 30420 \Rightarrow S(18; 30420)$$

 $\Rightarrow$ Il doit planter 78 ($60+18$) poiriers pour un rendement maximal de 30420 poires.**Exercice 5.**

$$[AD] = 6, [CI] = [DI] = 3, [AM] = [BN] = x, [BM] = [CN] = 6 - x$$

$$\text{aire du } \triangle MNI = 36 - \frac{(x+3) \cdot 6}{2} - \frac{(6-x) \cdot x}{2} - \frac{(6-x) \cdot 3}{2}$$

$$= 36 - (3x + 9) - \left(3x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(9 - \frac{3x}{2}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}x + 18$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}x + 18 \text{ (parabole convexe, minimum au sommet)}$$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{\frac{9}{2}}{1} = \frac{9}{2} \text{ et } \frac{-\Delta}{4a} = \frac{\frac{63}{4}}{2} = \frac{63}{8} \Rightarrow S\left(\frac{9}{2}; \frac{63}{8}\right)$$

 $\Rightarrow$ L'aire du $\triangle MNI$ est minimale si $[AM] = 4.5$.