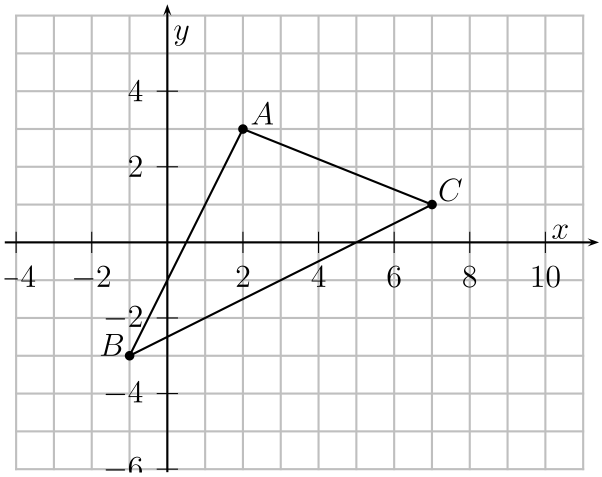
Géométrie Analytique II

Exercice 1



a) $\overrightarrow{BC}$ vecteur normal à h_A : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 7+1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$(h_A) : 8x + 4y + c = 0$

$A \in h_A : 16 + 12 + c = 0$ $\quad c = -28 \quad \Rightarrow (h_A) : 8x + 4y - 28 = 0$

$\boxed{(h_A) : 2x + y - 7 = 0}$

b) milieu du segment AC : $N\left(\frac{2+7}{2}; \frac{3+1}{2}\right)$ $\quad N\left(\frac{9}{2}; 2\right)$

$(m_B) : \overrightarrow{OB} + k \cdot \overrightarrow{BN}$ $\quad \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2}+1 \\ 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ 5 \end{pmatrix}$

$(m_B) : \begin{cases} x = -1 + \frac{11}{2}k \\ y = -3 + 5k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} 10x = -10 + 55k \\ -11y = 33 - 55k \end{cases}$ $\quad 10x - 11y = 23$

$\boxed{(m_B) : 10x - 11y - 23 = 0}$

c) milieu du segment AB : $L\left(\frac{2-1}{2}; \frac{3-3}{2}\right)$ $\quad L\left(\frac{1}{2}; 0\right)$

$\overrightarrow{AB}$ vecteur normal à n_C : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

$(n_C) : -3x - 6y + c = 0$

$L \in n_C : -\frac{3}{2} + c = 0$ $\quad c = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow n_C) : -3x - 6y + \frac{3}{2} = 0$

$\boxed{(n_C) : 2x + 4y - 1 = 0}$

d) droite (AB) : $y = mx + h$ avec $m = \frac{-6}{-3} = 2 \quad \Rightarrow y = 2x + h$

$A \in (AB) \quad \Rightarrow 3 = 4 + h \quad \Rightarrow h = -1 \quad \Rightarrow (AB): \ y = 2x - 1$

$\Rightarrow (AB): \ 2x - y - 1 = 0$

droite (BC) : $\overrightarrow{OB} + k \cdot \overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

droite (BC) : $\begin{cases} x = -1 + 8k \\ y = -3 + 4k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x = -1 + 8k \\ -2y = 6 - 8k \end{cases} \qquad x - 2y = 5$

$\Rightarrow (BC) : x - 2y - 5 = 0$

bissectrices : $\dfrac{2x - y - 1}{\sqrt{5}} = \pm \dfrac{x - 2y - 5}{\sqrt{5}}$

$2x - y - 1 = \pm(x - 2y - 5) \qquad x + y + 4 = 0$ ou $x - y - 2 = 0$

la pente de la bissectrice intérieure est positive $\Rightarrow \boxed{(b_B) : x - y - 2 = 0}$

e) $\delta(A; BC) = \dfrac{|2 - 6 - 5|}{\sqrt{5}} = \dfrac{9}{\sqrt{5}} = \boxed{\dfrac{9\sqrt{5}}{5} \ u}$

f) $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \ u$

aire du $\Delta \ ABC$: $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot \dfrac{9\sqrt{5}}{5} = \boxed{18 \ u^2}$

g) hauteur du $\Delta \ ABC$ issue du sommet C : h_C

$\overrightarrow{AB}$ vecteur normal à h_C

$(h_C) : -3x - 6y + c = 0$

$C \in h_C : -21 - 6 + c = 0 \qquad c = 27 \quad \Rightarrow h_C) : -3x - 6y + 27 = 0$

$(h_C) : x + 2y - 9 = 0$

$h_A \cap h_C : \begin{cases} 2x + y - 7 = 0 \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + 2y = 14 \\ -x - 2y = -9 \end{cases}$

$x = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow y = 7 - \frac{10}{3} = \frac{11}{3}$

$\boxed{H\left(\dfrac{5}{3}; \dfrac{11}{3}\right)}$

h) médiatrice du segment AC : n_B

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ vecteur normal à n_B

$(n_B) : 5x - 2y + c = 0$

$N \in n_B : \frac{45}{2} - 4 + c = 0 \qquad c = -\frac{37}{2} \quad \Rightarrow (n_B) : 5x - 2y - \frac{37}{2} = 0$

$(n_B)\,:\,10x-4y-37=0$

$n_B\cap n_C\,:\,\begin{cases}10x-4y-37=0\\2x+4y-1=0\end{cases}\quad\Rightarrow x=\frac{19}{6}\quad\Rightarrow y=\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{19}{3}+1\right)=-\frac{4}{3}$

$\boxed{K\left(\frac{19}{6};-\frac{4}{3}\right)}$

i) $M\left(\frac{2-1+7}{3};\frac{3-3+1}{3}\right)$ $\qquad\boxed{M\left(\frac{8}{3};\frac{1}{3}\right)}$

j) $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}\frac{19}{6}-2\\-\frac{4}{3}-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{6}\\-\frac{13}{3}\end{pmatrix}$

$R=\|\overrightarrow{AK}\|=\sqrt{\frac{49}{36}+\frac{169}{9}}=\sqrt{\frac{725}{36}}=\frac{5\sqrt{29}}{6}\cong\boxed{4{,}49\ u}$

k) droite $(BC)\,:\,x-2y-5=0$

$(d)\,:\,x-2y+c=0$

$A\in d\,:\,2-6+c=0$ $\qquad c=4$

$\boxed{(d)\,:\,x-2y+4=0}$

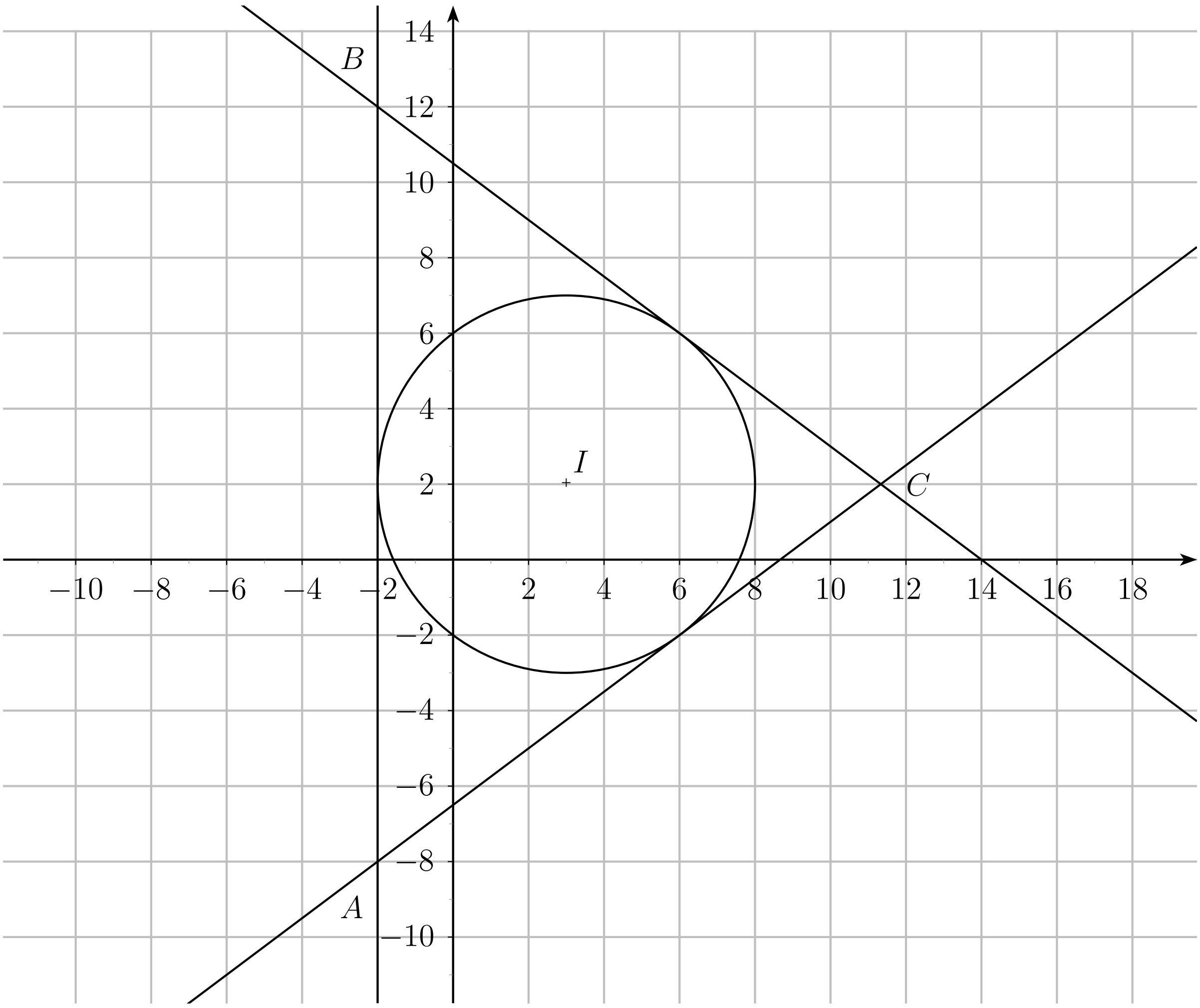
l) $\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{OK}-\overrightarrow{OH}=\begin{pmatrix}\frac{19}{6}-\frac{5}{3}\\-\frac{4}{3}-\frac{11}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\-5\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OK}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}-\frac{19}{6}\\\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{HK};\overrightarrow{KM})=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}=0$

$\boxed{\overrightarrow{HK}\text{ et }\overrightarrow{KM}\text{ sont colinéaires et ont un point en commun }K\text{, ils sont donc alignés}}$

Exercice 2



droite (AB) est une droite parallèle à l'axe des ordonnées : $x+2=0$

droite (AC) : $\overrightarrow{OA}+k\cdot\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}\frac{34}{3}+2\\2+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{40}{3}\\10\end{pmatrix}$

droite (AC) : $\begin{cases}x=-2+\frac{40}{3}k\\y=-8+10k\end{cases}$ $\qquad\begin{cases}3x=-6+40k\\-4y=32-40k\end{cases}$

droite (AC) : $3x-4y-26=0$

droite (BC) : $\overrightarrow{OB}+k\cdot\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}\frac{34}{3}+2\\2-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{40}{3}\\-10\end{pmatrix}$

droite (BC) : $\begin{cases}x=-2+\frac{40}{3}k\\y=12-10k\end{cases}$ $\qquad\begin{cases}3x=-6+40k\\4y=48-40k\end{cases}$

droite (BC) : $3x+4y-42=0$

bissectrices des droites (AB) et (AC) : $x+2=\pm\dfrac{3x-4y-26}{5}$

$5x+10=\pm(3x-4y-26)\qquad 2x+4y+36=0$ ou $8x-4y-16=0$

la pente de la bissectrice intérieure est positive $\qquad\Rightarrow (b_A) : 8x-4y-16=0$

bissectrices des droites (AB) et (BC) : $x+2=\pm\dfrac{3x+4y-42}{5}$

$5x+10=\pm(3x+4y-42)\qquad 2x-4y+52=0$ ou $8x+4y-32=0$

la pente de la bissectrice intérieure est négative $\qquad\Rightarrow (b_B) : 8x+4y-32=0$

$b_A\cap b_B$: $\begin{cases}8x-4y=16\\8x+4y=32\end{cases}\qquad 16x=48$

$x=3\qquad y=2$

coordonnées du point I le centre du cercle inscrit : $I(3;2)$

$r=\delta(I;AB)=|3+2|=\boxed{5\ u}$